

# Loi binomiale

# I) Coefficient binomial

## 1) Dénombrement

Je joue à **Pile** ou **Face**. Je jette la pièce 4 fois.

a) Combien de tirages possibles ?

# I) Coefficient binomial

## 1) Dénombrement

Je joue à **Pile** ou **Face**. Je jette la pièce 4 fois.

a) Combien de tirages possibles ?

PPPP, PPPF, PPFP, PFFF, PFPP, ..., FFFF

# I) Coefficient binomial

## 1) Dénombrement

Je joue à **Pile** ou **Face**. Je jette la pièce 4 fois.

a) Combien de tirages possibles ?

PPPP, PPPF, PPFP, PFFF, PFPP, ..., FFFF

On en compte  $16 = 2^4$

b) Combien de tirages possibles avec 2 Face ?

# I) Coefficient binomial

## 1) Dénombrement

Je joue à **Pile** ou **Face**. Je jette la pièce 4 fois.

a) Combien de tirages possibles ?

PPPP, PPPF, PPFP, PFFF, PFPP, ..., FFFF

On en compte  $16 = 2^4$

b) Combien de tirages possibles avec 2 Face ?

PFFF, PFPF, PFFP, FPPF, FPFP, FFPP

On en compte 6.

# I) Coefficient binomial

## 1) Dénombrement

Je joue à **Pile** ou **Face**. Je jette la pièce 4 fois.

a) Combien de tirages possibles ?

PPPP, PPPF, PPFP, PFFF, PFPP, ..., FFFF

On en compte  $16 = 2^4$

b) Combien de tirages possibles avec 2 Face ?

PFFF, PFPF, PFFP, FPPF, FPFP, FFPP

On en compte 6.

On cherche une formule ou une méthode pour systématiser ce résultat.

## 2) Triangle de Pascal

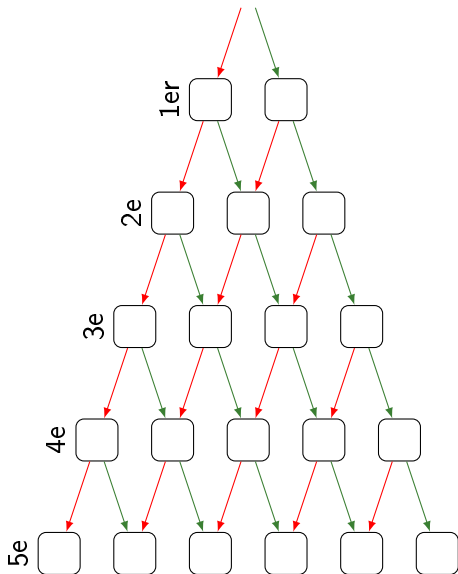
Cette figure permet de rapidement trouver les nombres recherchés.

Exemple :

- flèche rouge = Pile
- flèche verte = Face

Si on ne fait qu'un lancer,

- où arrive-t-on si on fait un Face ?
- et si on fait 0 Face ?
- combien de chemin possibles dans chaque cas ?



## 2) Triangle de Pascal

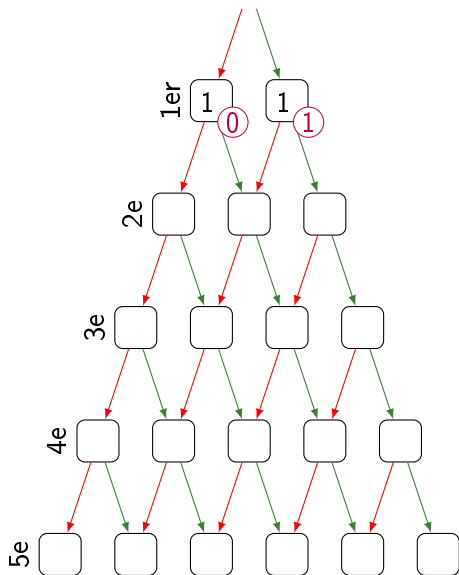
Cette figure permet de rapidement trouver les nombres recherchés.

Exemple :

- flèche rouge = Pile
- flèche verte = Face

Si on ne fait deux lancers,

- où arrive-t-on si on fait un 2 Face ?
- et si on fait 1 Face ?
- et si on fait 0 Face ?
- combien de chemin possibles dans chaque cas ?



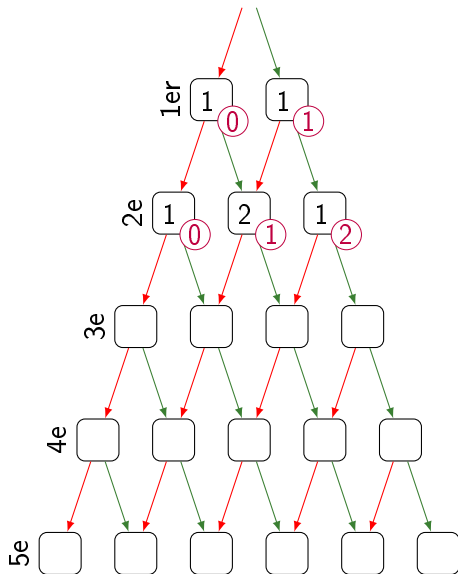
## 2) Triangle de Pascal

Cette figure permet de rapidement trouver les nombres recherchés.

Exemple :

- flèche rouge = Pile
- flèche verte = Face

On peut poursuivre en mettant en évidence la règle.



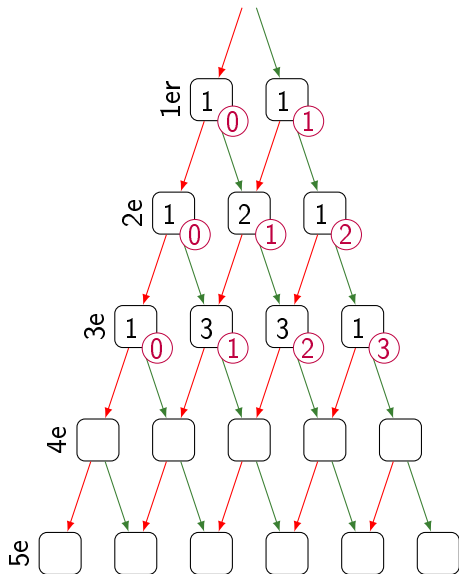
## 2) Triangle de Pascal

Cette figure permet de rapidement trouver les nombres recherchés.

Exemple :

- flèche rouge = Pile
- flèche verte = Face

On peut poursuivre en mettant en évidence la règle.





## 2) Triangle de Pascal

Cette figure permet de rapidement trouver les nombres recherchés.

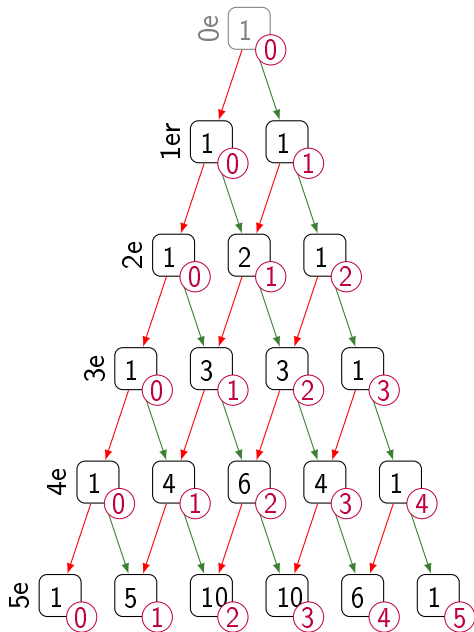
Exemple :

- flèche rouge = Pile
- flèche verte = Face

On peut poursuivre en mettant en évidence la règle.

On note  $\binom{n}{k}$  le nombre qui apparaît à la ligne  $n$  et la colonne  $k$ .

par ex.  $\binom{5}{2} = 10$



### 3) $k$ parmi $n$

$\binom{n}{k}$  se lit «  $k$  parmi  $n$  »

C'est le nombre de possibilités pour choisir  $k$  items parmi  $n$ .

Exemple : Choisir 2 lettres parmi ABCD

### 3) $k$ parmi $n$

$\binom{n}{k}$  se lit «  $k$  parmi  $n$  »

C'est le nombre de possibilités pour choisir  $k$  items parmi  $n$ .

Exemple : Choisir 2 lettres parmi ABCD

AB, AC, AD, BC, BD, CD

6 choix, correspond à  $\binom{4}{2} = 6$

### 3) $k$ parmi $n$

$\binom{n}{k}$  se lit «  $k$  parmi  $n$  »

C'est le nombre de possibilités pour choisir  $k$  items parmi  $n$ .

Exemple : Choisir 2 lettres parmi ABCD

AB, AC, AD, BC, BD, CD

6 choix, correspond à  $\binom{4}{2} = 6$

Revient au même que : « 2 Face sur 4 lancers, combien de possibilité ? »

### 3) $k$ parmi $n$

$\binom{n}{k}$  se lit «  $k$  parmi  $n$  »

C'est le nombre de possibilités pour choisir  $k$  items parmi  $n$ .

Exemple : Choisir 2 lettres parmi ABCD

AB, AC, AD, BC, BD, CD

6 choix, correspond à  $\binom{4}{2} = 6$

Revient au même que : « 2 Face sur 4 lancers, combien de possibilité ? »

(1,2) ou (1,3) ou (1,4) ou (2,3) ou (2,4) ou (3,4) → 6 possibilités.

- 9 et 10 page 149
- 29 et 30 page 150

## 4) Cas particulier

Avec le triangle, on remarque que

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- 8 page 149
- 28 page 150

## 5) Ordre

Faire un Face au 1er et au 3e = Faire un face au 3e et au 1er.

$$\Rightarrow (1, 3) = (3, 1)$$

L'ordre ne compte pas.

On se donne 15 items. On veut savoir le nombre d'ordres possibles.

1. Combien a-t-on de choix pour l'item a placer en 1er ?
2. Le 1er étant placé, combien a-t-on de choix pour le 2e ?
3. Et ensuite pour le 3e ?
4. Poursuivez et déduisez-en le nombre d'ordres possibles.

## 6) Factorielle

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

On lit « factorielle  $n$  »

**Exemple :**  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

## 6) Factorielle

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

On lit « factorielle  $n$  »

**Exemple :**  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Il y a  $n!$  ordres possibles pour  $n$  items distincts.

**Exemple :** Il y a  $4! = 24$  façons de placer à la file 4 personnes.

## 7) Formule du $k$ parmi $n$

Supposons que l'on veuille calculer 3 parmi 7, c'est à dire  $\binom{7}{3}$

On peut dessiner le triangle de Pascal mais on veut une autre méthode.

On veut donc choisir 3 parmi (par ex.) ABCDEFG : ABC ou AEG ou BFG ou...

1. Combien y a t-il de choix pour le 1er ?
2. Pour le 2e ? Pour le 3e ?
3. Combien obtient-on de possibilités ?
4. Dans le calcul précédent, on a compté plusieurs fois une même combinaison selon son ordre : AEG, AGE, EAG, ...  
Combien y a-t-il d'ordre pour 3 items ?
5. Déduisez en le nombre de choix de 3 parmi 7
6. Conjecturez une formule générale.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**Exemples :**

- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{(1 \times 2 \times 3) \cdot (1 \times 2)} = 10$
- $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{(1 \times 2 \times 3 \times 4) \cdot (1 \times 2 \times 3)} = 35$
- $\binom{20}{15} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 20}{(1 \times \dots \times 5) \cdot (1 \times \dots \times 15)} = 15\,504$

**Remarque :** Les nombres deviennent grands et il peut être problématique, même pour une machine, de calculer  $\binom{1000}{250}$  par ex.

## II) Calcul de probabilité

### 1) Exemple

Une usine fabrique des paquets de céréales. Comme les réservoirs servent à d'autres produits, on estime que la probabilité qu'un paquet pris au hasard contienne du gluten est 2 %.

On prélève 3 paquets.

On veut savoir la probabilité que dans le lot de 3, on trouve exactement 2 paquets contenant du gluten.

## 2) Modélisation

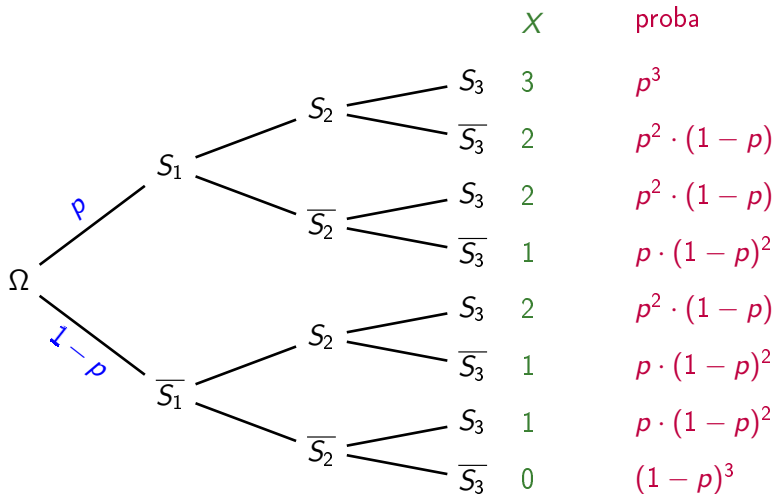
- **Expérience élémentaire** : On prélève au hasard une boîte dans le stock
- **Succès** : Le paquet prélevé contient du gluten
- $p(S) = p = 2\%$
- On répète l'expérience  $n = 3$  fois de façon identique et indépendante.
- On appelle  $X$  le nombre de succès.

*Anticipe sur la suite* :  $X$  suit la **loi Binomiale**  $\mathcal{B}(n; p)$ .

La question posée revient donc à calculer  $p(X = 2)$ .

### 3) Arbre

$n = 3$ , on peut faire un arbre. Cherchons  $p(X = 2)$ .



On compte 3 chemins dont la probabilité est  $p^2 \cdot (1 - p)$ .

$$p(X = 2) = 3 \cdot p^2(1 - p)^2$$

Et on peut remplacer  $p$  par  $2/100$ .

Dans cette formule...

- $p$  est la probabilité d'un succès,
- $p^2$  car on veut  $X = 2$  donc 2 succès,
- $(1 - p)$  est la probabilité d'un échec,
- $(1 - p)^1$  car on veut  $X = 2$ , 2 succès sur 3, donc 1 échec,
- 3 car il y a 3 façons de prendre 2 succès parmi 3 essais. C'est  $\binom{3}{2}$

- 6 page 149
- 31 page 150

## 4) Généralisation

Si  $n = 50$ , on ne fera pas un arbre !

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

C'est la loi **binomiale**  $\mathcal{B}(n; p)$

**Exemple** : si  $n = 50$  et  $p = 2\%$

$$p(X = 2) = \binom{50}{2} \cdot (2/100)^2 \cdot (1 - 2/100)^{48} \approx 0,185801$$

- 11 à 15 page 149
- 36 à 38 page 151
- 39 à 48 page 151-152

**Important** : La formule permet de comprendre mais il est long de calculer une probabilité comme  $p(X \leq 7)$ . On utilise alors les fonctions de la calculatrice pour le faire automatiquement.

### III) Espérance

**Exemple** : on sait que 40 % de la population est du groupe sanguin A+. On choisit 3 personnes au hasard dans la population. Soit  $X$  le nombre de personnes A+ parmi ces 3.

Déterminer  $E(X)$ .

### III) Espérance

**Exemple** : on sait que 40 % de la population est du groupe sanguin A+. On choisit 3 personnes au hasard dans la population. Soit  $X$  le nombre de personnes A+ parmi ces 3.

Déterminer  $E(X)$ .

**Raisonnement** : On reconnaît que  $X$  suit une loi  $\mathcal{B}(n = 3; p = 40 \%)$ .

$k$	0	1	2	3	Total
$p(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064	1,000

### III) Espérance

**Exemple** : on sait que 40 % de la population est du groupe sanguin A+. On choisit 3 personnes au hasard dans la population. Soit  $X$  le nombre de personnes A+ parmi ces 3.

Déterminer  $E(X)$ .

**Raisonnement** : On reconnaît que  $X$  suit une loi  $\mathcal{B}(n = 3; p = 40 \%)$ .

$k$	0	1	2	3	Total
$p(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064	1,000

$$E(X) = 0 \times 0,216 + 1 \times 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,064 = 1,2$$

Quelle formule peut-on conjecturer faisant intervenir  $n = 3$  et  $p = 40 \%$  ?

### III) Espérance

**Exemple** : on sait que 40 % de la population est du groupe sanguin A+. On choisit 3 personnes au hasard dans la population. Soit  $X$  le nombre de personnes A+ parmi ces 3.

Déterminer  $E(X)$ .

**Raisonnement** : On reconnaît que  $X$  suit une loi  $\mathcal{B}(n = 3; p = 40 \%)$ .

$k$	0	1	2	3	Total
$p(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064	1,000

$$E(X) = 0 \times 0,216 + 1 \times 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,064 = 1,2$$

Quelle formule peut-on conjecturer faisant intervenir  $n = 3$  et  $p = 40 \%$  ?

$$E(X) = np$$

# Démonstration pour ceux qui veulent aller plus loin

Soit  $X$  suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$ .

On peut appeler  $X_1$  le résultat au premier tirage. On dira  $X_1 = 1$  en cas de succès à ce tirage et  $X_1 = 0$  en cas d'échec.

On déduit donc que  $E(X_1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ .

On peut faire la même chose pour tous les  $X_i$  avec  $1 \leq i \leq n$ .

On peut dire que  $X = X_1 + \dots + X_n$  et les variables  $X_i$  sont indépendantes alors

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + \dots + E(X_n) \\ &= p + \dots + p \\ &= np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k 0^n k \cdot p(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Puisque le premier terme de la somme est pour  $k = 0$  on peut le supprimer sans changer le résultat :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On peut ensuite poser  $h = k - 1$ , sorte que quand  $1 \leq k \leq n$ , on aura  $0 \leq h \leq n - 1$  et que tous les  $k$  sont remplacés par  $h + 1$ .

$$E(X) = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1) \cdot \binom{n}{h+1} p^{h+1} (1-p)^{n-(h+1)}$$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{h=0}^{n-1} (h+1) \cdot \binom{n}{h+1} p^{h+1} (1-p)^{n-(h+1)} \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} (h+1) \cdot \frac{n!}{(h+1)!(n-h-1)!} p \cdot p^h (1-p)^{n-h-1}
 \end{aligned}$$

On peut dire que  $n! = n \times (n-1)!$  et on a déjà écrit  $p^{h+1} = p \cdot p^h$  ce qui nous permet de placer  $n \cdot p$  en facteur de la somme. On sait aussi que  $(h+1)! = (h+1) \cdot h!$  ce qui permet de simplifier un facteur  $(h+1)$ .

$$\begin{aligned}
 E(X) &= n \cdot p \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{h!((n-1)-h)!} p^h (1-p)^{(n-1)-h} \\
 &= n \cdot p \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-h-1}
 \end{aligned}$$

Dans la somme précédente, on reconnaît des probabilités de forme  $p(Y = h)$  avec  $Y$  suivant  $\mathcal{B}(n - 1; p)$ . La somme de ces probabilités doit donc faire 1.

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{(n-1)-h} \\ &= n \cdot p \cdot 1 \\ &= np \end{aligned}$$

## IV) Écart-type

Si  $X$  suit  $\mathcal{B}(n; p)$  alors son écart-type est

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Par exemple, si  $n = 100$  et  $p = 0,6$  alors  $E(X) = np = 60$  et  $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,6 \times 0,4} \approx 5$ .

Cette information est très utile car elle permet de prédire facilement les valeurs qui ont une chance de se produire. En effet, on sait que très probablement,  $X$  sera entre  $E(X) - 2\sigma(X)$  et  $E(X) + 2\sigma(X)$ , c'est à dire entre 50 et 70.

Il sera quasiment impossible que  $X = 40$ .

## Démonstration pour ceux qui veulent aller plus loin

Par définition,  $\sigma(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - n^2 p^2$

Nous allons donc calculer

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E((X_1 + \dots + X_n)^2) \\ &= \sum_{i,j} E(X_i \cdot X_j) \end{aligned}$$

Comme on doit considérer tous les couples  $(i, j)$ , il y a  $n^2$  termes dans la somme, mais ils ne fonctionnent pas tous de la même façon :

$$i = j: \quad E(X_i^2) = E(X_i) = p$$

Ceci est dû au fait que  $X_i = 0$  ou  $1$  donc  $X_i^2 = X_i$ .

$$i \neq j: \quad E(X_i \cdot X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j) = p^2$$

Ceci est dû au fait que  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendants.

$$E(X^2) = (n^2 - n) p^2 + np \Rightarrow \sigma(X)^2 = E(X^2) - n^2 p^2 = np - np^2$$