$$10^x = A \Leftrightarrow x = \log(A)$$

logarithme décimal

I) Définition

Pour $A \in \mathbb{R}$, avec $A > 0$:

$$10^x = A \Leftrightarrow x = \log A$$

Exemple : On cherche x tel que $10^x = 0,0001$.

On voit qu'il faut $x = -4$, donc $\log 0,0001 = -4$.

Exercices du livre

- 2 à 4 page 83
- 25 à 28 page 84

II) log et ln

$$\begin{aligned} 10^x = A &\Leftrightarrow \ln\left(10^x\right) = \ln(A) \\ &\Leftrightarrow x \ln 10 = \ln A \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln A}{\ln 10} \end{aligned}$$

Donc, **par définition**, $\log A = \dfrac{\ln A}{\ln 10}$.

Remarque sur la notation

En France on note :

- ln pour logarithme naturel,
- log pour logarithme de base 10.

Les Anglais (et donc Américains et donc dans les langages de programmation) notent :

- log pour logarithme naturel,
- $\log_{10}$ pour logarithme de base 10

  `log10` en Python par exemple.

III) Propriétés

Comme $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ on voit que log a les mêmes propriétés que ln :

a) Croissante et continue,
b) mêmes limites,
c) $\log 1 = 0$
d) $\log(a \times b) = \log a + \log b$
e) $\log\left(a^x\right) = x \cdot \log a$

Seule différence : $\ln\left(e^x\right) = x$ mais $\log\left(10^x\right) = x$.

Exercices du livre

- 9 – 17 p83 ; 37 – 43 p85 : propriétés algébrique
- 30 – 32 p84 : croissance de la fonction
- 18 – 23 p83 ; 45 – 53 p85 ; 62 – 66 p86 : équation/inéquation en a^x
- 61 : physique, magnitude stellaire
- 70, 96 : chimie, PH
- 71, 74, 94 : physique, acoustique
- 93 : physique, Richter

Pour conclure

$\log_{10}$ a les mêmes propriété et donc les mêmes usages que ln.

- ln est qualifié de naturel car $\ln(x)' = \dfrac{1}{x}$ et ln fonctionne avec e^x qui vérifie $(e^x)' = e^x$. Il n'y a aucune constante en plus dans ces formules.

  Au contraire, $\log(x)' \approx 0,4 \cdot \dfrac{1}{x}$ et $(10^x)' \approx 2,3 \cdot 10^x$. Il y a des constantes à ajouter.
- $\log_{10}$ est pratique pour nous qui comptons en base 10. Cela n'a rien d'universel (donc non « naturel ») . Si nous avions 12 doigts, nous compterions probablement en base 12 et alors on utiliserait un logarithme de base 12.

Néanmoins, les propriétés algébriques sont les mêmes et tout ce que l'on peut faire avec ln, on peut le faire avec log.