Intégration

I) Intégrale

1) Définition

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Avec F une primitive de f.

N'importe quelle primitive, ça ne change rien !

Ceci est valable pour $b < a$ et pour $f(x) < 0$.

On lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$. »

Exemple

On cherche $\displaystyle\int_1^5 (2x+1)\,dx$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x+1)\,dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x+1$

$$F(x) =$$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x+1)\,dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x + 1$

$$F(x) = x^2 + x$$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x+1)\,dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x+1$

$$F(x) = x^2 + x$$

- On en déduit :

$$\int_1^5 (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_1^5$$
$$=$$
$$=$$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x+1)\,dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x+1$

$$F(x) = x^2 + x$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^5 (2x+1)\,dx &= \left[x^2+x\right]_1^5 \\ &= \left(5^2+5\right) - \left(1^2+1\right) \\ &= 28\end{aligned}$$

2) Linéarité

Une intégrale est une somme, on comprend donc que l'on peut factoriser comme dans :

$$2 + 4 + 6 + \cdots 1000 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots 500)$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

De même, on peut séparer les termes d'une somme :

$$(1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) + \cdots = (1 + 2 + 3 + \cdots) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots)$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

démonstration

On veut montrer que $\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

Soit F une primitive de f. On alors $F' = f$ et $(k \cdot F)' = k \cdot F' = k \cdot f$.

$$\begin{aligned}\int_a^b k \cdot f(x)\, dx &= [k \cdot F(x)]_a^b \\ &= k \cdot F(b) - k \cdot F(a) = k \cdot (F(b) - F(a)) \\ &= k \cdot [F(x)]_a^b = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

Pour montrer que $\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$ le raisonnement est le même. Il suffit de constater que si F primitive de f et G primitive de g, alors

$$(F + G)' = F' + G' = f' + g'$$

Autrement dit, la linéarité de l'intégration repose sur la linéarité de la dérivation.

3) Positivité

f positive et continue, $a \leqslant b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\, x \geqslant 0$

démonstration

f continue $\Rightarrow$ f a une primitive F.

Comme $f \geqslant 0$ et $F' = f$ alors F croissante.

Donc si $a \leqslant b$, $F(a) \leqslant F(b) \Rightarrow 0 \leqslant F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

4) Relation de Chasles

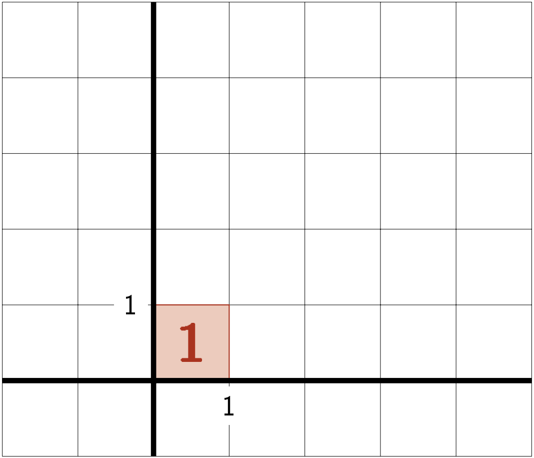
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

démonstration

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\
&= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\
&= F(c) - F(a) \\
&= [F(x)]_a^c \\
&= \int_a^c f(x)\,dx
\end{aligned}$$

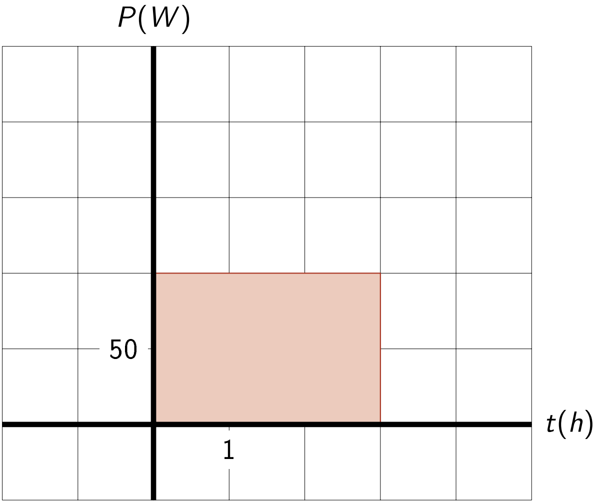
II) Calcul d'aire

1) Unité d'aire



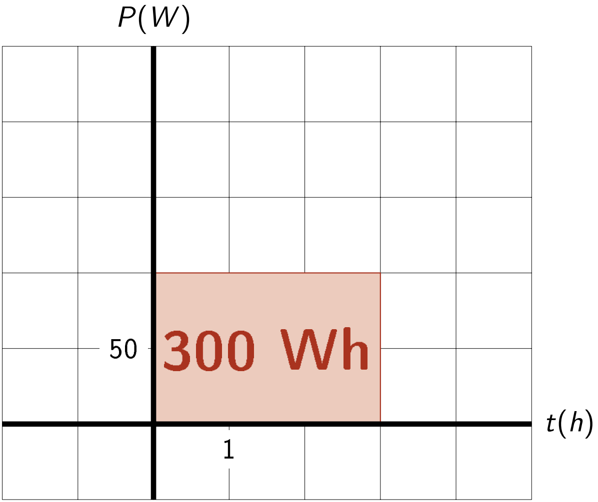
L'unité d'aire de ce repère est donnée par le carré.

Même chose avec des unités



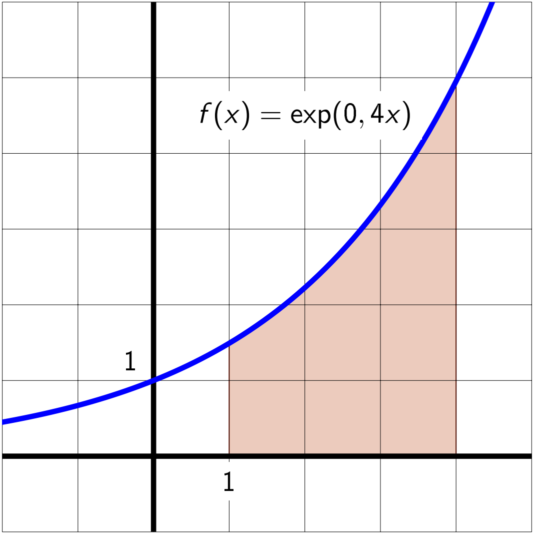
Le rectangle a une aire de...

Même chose avec des unités

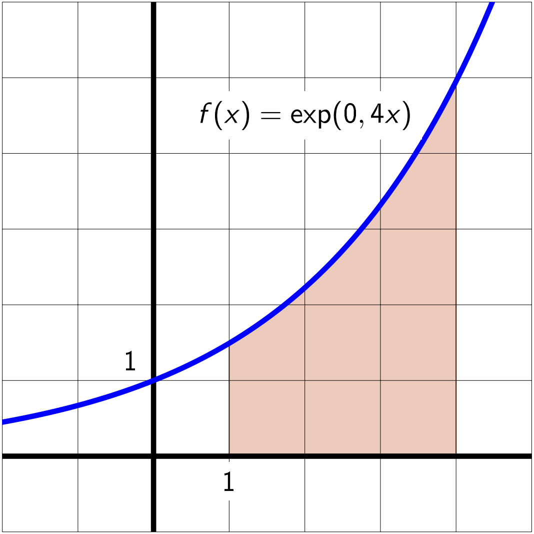


Le rectangle a une aire de... $3h \times 100W = 300Wh$

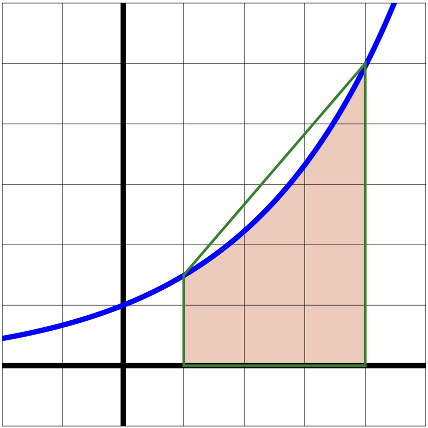
2) Problème : Donner l'aire sous la courbe



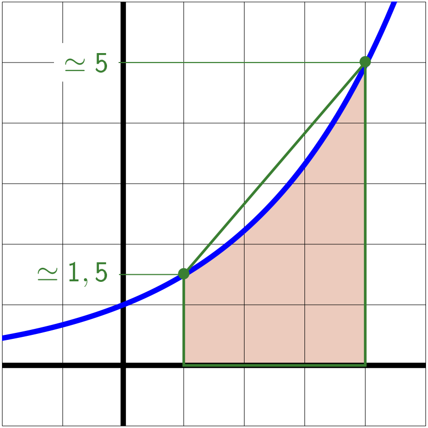
2) Problème : Donner l'aire sous la courbe



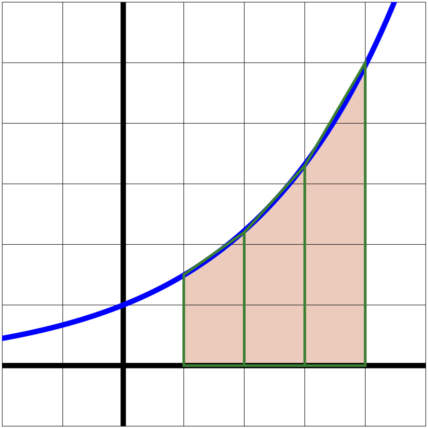
Estimation grossière : $\simeq 8$ ou $9ua$



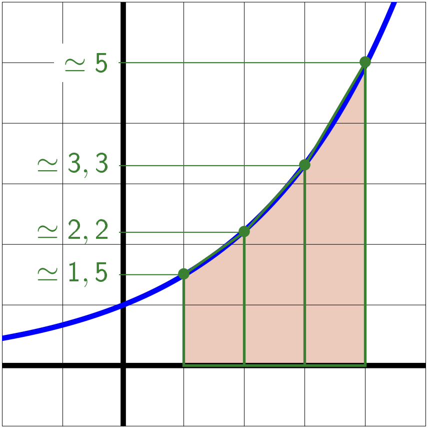
La zone ressemble un peu à un trapèze. On détermine l'aire de ce trapèze en repérant les coordonnées des coins.



Aire du trapèze ainsi tracé : $3 \times \frac{1,5+5}{2} = 9,75$ (pas bonne approx)

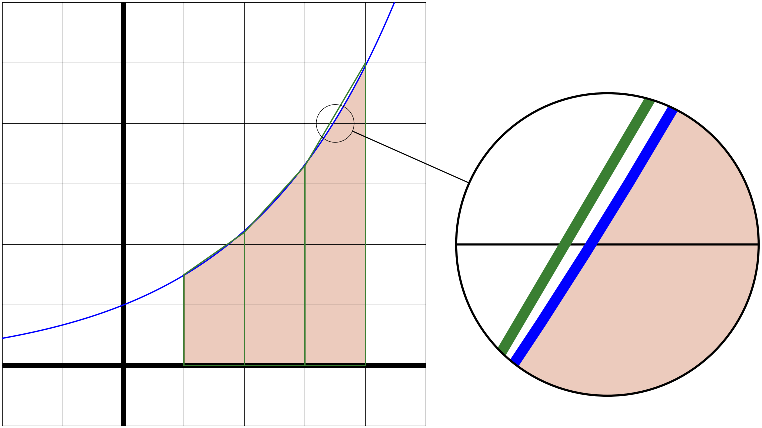


On peut mieux faire ne découpant la zone en trapèzes plus petits.

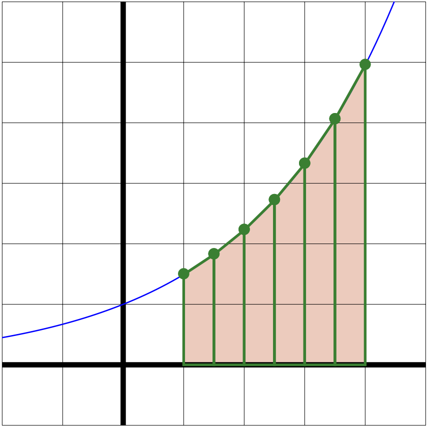


Aire des 3 trapèzes ainsi tracés : $\frac{1,5+2,2}{2} + \frac{2,2+3,3}{2} + \frac{3,3+5}{2} = 8,75$ (bonne approx)

Si on y regarde de plus près, on voit que nos trapèzes sont encore trop grands.



On peut découper plus, par exemple en six :



Avec une calculatrice...

x	$f(x)$
1	1,49
1,5	1,82
2	2,23
2,5	2,72
3	3,32
3,5	4,06
4	4,95

$$\mathcal{A} \simeq 0,5 \times \frac{1,49 + 1,82}{2} + \cdots$$

$$\mathcal{A} \simeq 8,685$$

On voudrait augmenter aussi grand que possible le nombre de trapèze.
On peut utiliser un algorithme :

$S \leftarrow 0$
$N \leftarrow 300$
$dx \leftarrow 300/N$
pour k *allant de* 0 *à* $N-1$ **faire**
  $x \leftarrow 1 + k \cdot dx$
  $S \leftarrow S + dx \cdot \frac{\exp(.4 \cdot x) + \exp(.4(x+dx))}{2}$
fin
Afficher S

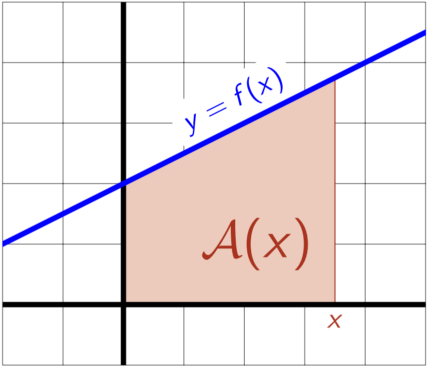
On voudrait augmenter aussi grand que possible le nombre de trapèze.
On peut utiliser un algorithme :

$S \leftarrow 0$
$N \leftarrow 300$
$dx \leftarrow 300/N$
pour *k allant de* 0 *à* $N-1$ **faire**
  $x \leftarrow 1 + k \cdot dx$
  $S \leftarrow S + dx \cdot \frac{\exp(.4 \cdot x)+\exp(.4(x+dx))}{2}$
fin
Afficher S

Retour : `8.653030854`

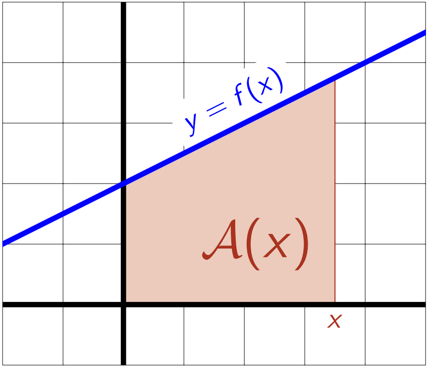
Les 4 premières décimales sont justes !

3) Un lien avec la primitive



Déterminez l'expression de $\mathcal{A}(x)$, aire de la zone en rouge, avec $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

3) Un lien avec la primitive

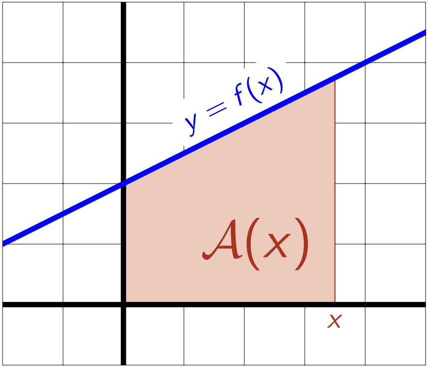


Déterminez l'expression de $\mathcal{A}(x)$, aire de la zone en rouge, avec $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

$$\mathcal{A}(x) = x \cdot \frac{f(0) + f(x)}{2} = 2x + \frac{x^2}{4}$$

On remarque...

3) Un lien avec la primitive



Déterminez l'expression de $\mathcal{A}(x)$, aire de la zone en rouge, avec $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

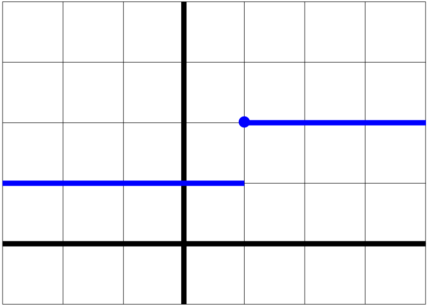
$$\mathcal{A}(x) = x \cdot \frac{f(0) + f(x)}{2} = 2x + \frac{x^2}{4}$$

On remarque...

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

$\mathcal{A}$ est une primitive de f.

4) Rappel : Continuité



Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

On peut constater que :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1)$$

f n'est pas continue en 1

Il y a un trou en 1.

Exercice

Ces fonctions sont-elles continues ?

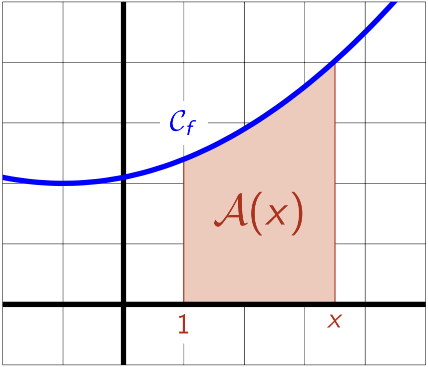
a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x-1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

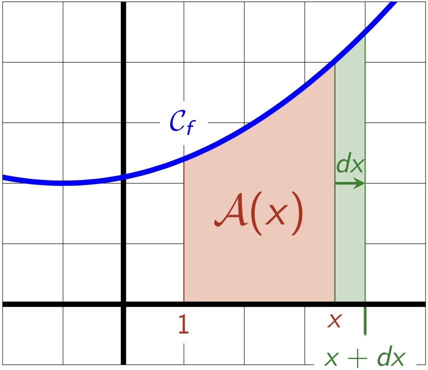
d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

5) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



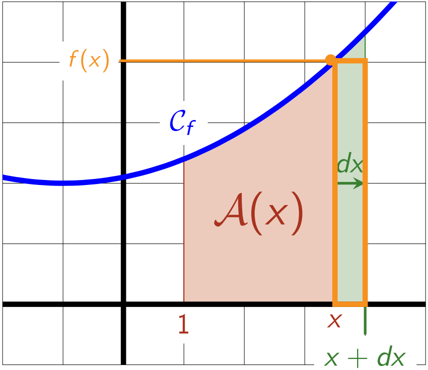
Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

On cherche $\mathcal{A}(x + dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f **croissante, continue et positive** sur $[x; x + dx]$

5) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

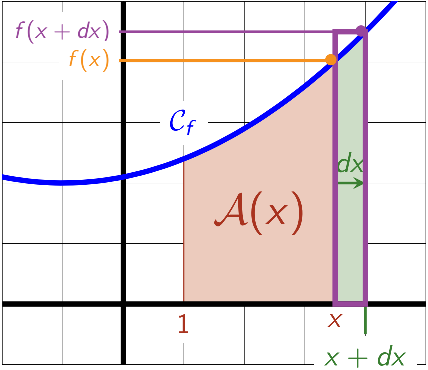
On cherche $\mathcal{A}(x+dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f **croissante, continue et positive** sur $[x; x+dx]$

- $dx \cdot f(x) \leqslant d\mathcal{A}$

5) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

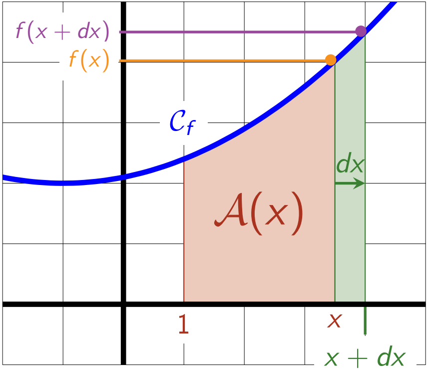
On cherche $\mathcal{A}(x+dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f **croissante, continue et positive** sur $[x; x+dx]$

- $dx \cdot f(x) \leqslant d\mathcal{A}$
- $d\mathcal{A} \leqslant dx \cdot f(x+dx)$

5) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

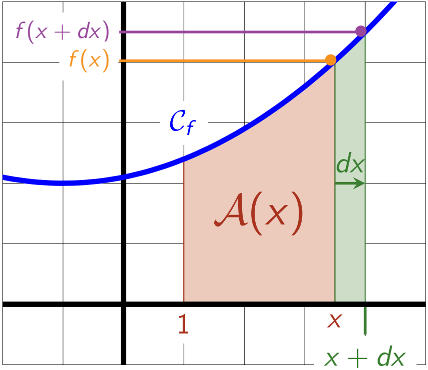
On cherche $\mathcal{A}(x+dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f **croissante, continue et positive** sur $[x; x+dx]$

- $dx \cdot f(x) \leqslant d\mathcal{A}$
- $d\mathcal{A} \leqslant dx \cdot f(x+dx)$
- Donc $f(x) \leqslant \dfrac{d\mathcal{A}}{dx} \leqslant f(x+dx)$

5) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

On cherche $\mathcal{A}(x+dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f **croissante, continue et positive** sur $[x; x+dx]$

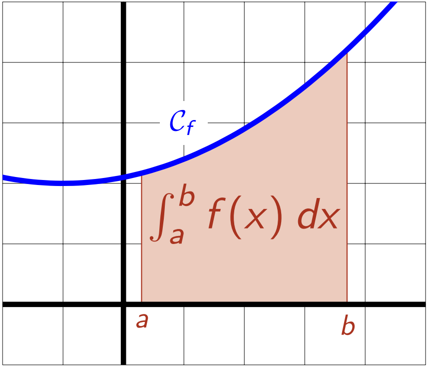
- $dx \cdot f(x) \leqslant d\mathcal{A}$
- $d\mathcal{A} \leqslant dx \cdot f(x+dx)$
- Donc $f(x) \leqslant \dfrac{d\mathcal{A}}{dx} \leqslant f(x+dx)$

On en déduit, quand $dx \to 0$:

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

Remarque : Continuité utile pour que $f(x+dx) \to f(x)$ quand $dx \to 0$

6) Calcul avec intégrale



f fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$.

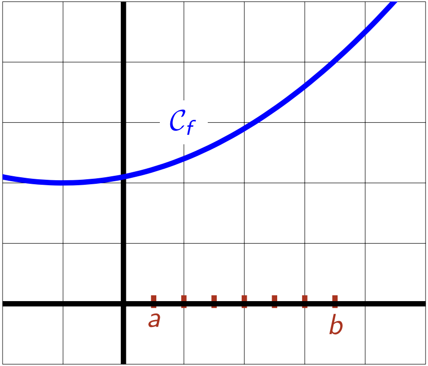
$\mathcal{C}_f$ est la courbe de f dans un repère orthogonal.

On admet que l'aire exprimée en unité d'aire de la zone entre $y = 0$, $x = a$, $x = b$ et $\mathcal{C}_f$ est :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

7) Sens de la notation

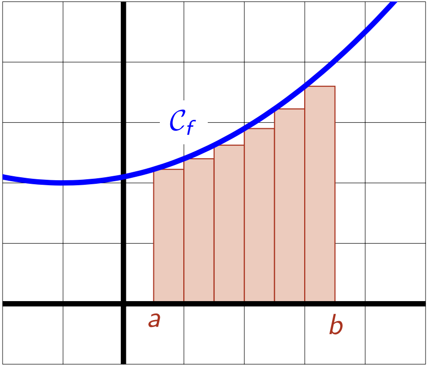
On pourrait approcher le calcul de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ de cette façon :



- On découpe l'intervalle $[a; b]$ en N tranches (ici $N = 6$)

7) Sens de la notation

On pourrait approcher le calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$ de cette façon :

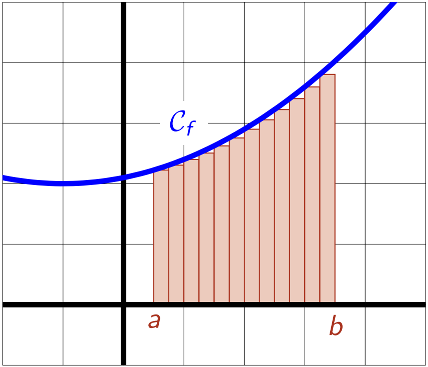


- On découpe l'intervalle $[a; b]$ en N tranches (ici $N = 6$)
- On calcule la **somme** des aires des rectangles (*voir figure*)

  Chaque rectangle a une aire $f(x) \times dx$, la somme est $\sum f(x)dx$

7) Sens de la notation

On pourrait approcher le calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$ de cette façon :



- On découpe l'intervalle $[a;b]$ en N tranches (ici $N=6$)
- On calcule la **somme** des aires des rectangles (*voir figure*)

  Chaque rectangle a une aire $f(x)\times dx$, la somme est $\sum f(x)dx$
- On découpe de plus en plus fin, $N\to+\infty$, alors

$$\sum f(x)\,dx \to \int f(x)\,dx$$

$\int$ représente donc une **S**omme.

III) Valeur moyenne

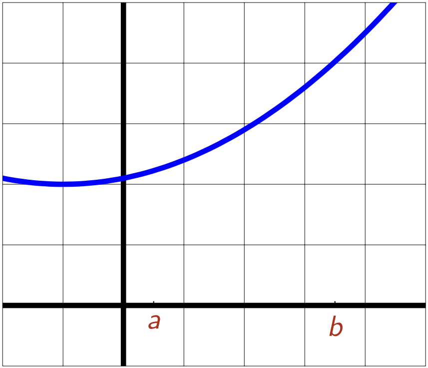
En statistiques :

- En général, les N individus ont des valeurs différentes x_i.
- Le total est $\sum_i x_i$
- Si tous les individus avaient la même valeur $\overline{x}$, le total serait inchangé.

$$N \cdot \overline{x} = \sum_i x_i \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

III) Valeur moyenne

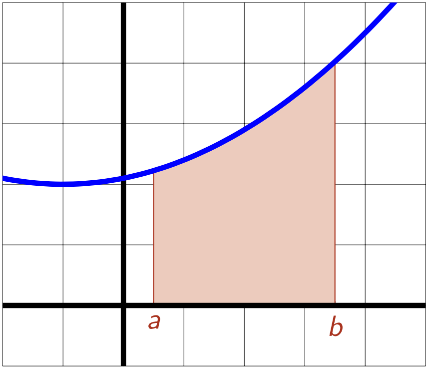
On raisonne de même sur l'intervalle $[a; b]$.



- $f(x)$ varie.

III) Valeur moyenne

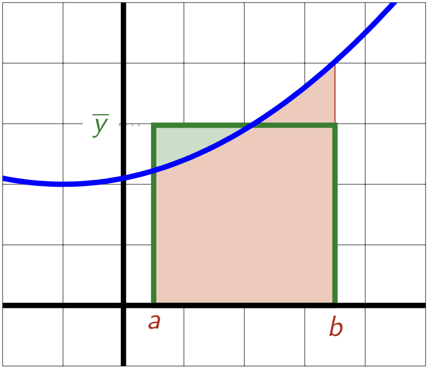
On raisonne de même sur l'intervalle $[a; b]$.



- $f(x)$ varie.
- Le total des $f(x)$ est l'aire $$\int_a^b f(x)\,dx$$

III) Valeur moyenne

On raisonne de même sur l'intervalle $[a; b]$.



- $f(x)$ varie.
- Le total des $f(x)$ est l'aire $$\int_a^b f(x)\,dx$$
- Si l'aire $f(x)$ était constante, on pourrait avoir la même aire totale.

$$(b-a)\cdot\overline{y} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$