



Équations différentielles

I) Définition

1) Linéaire du premier ordre

Une **équation différentielle** est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction généralement notée y qui apparaît avec ses dérivées y' , y'' ...

En TSTL, on ne voit que des équations **linéaires du premier ordre** où n'apparaissent que y et y' sous la forme :

$$(E) : \quad ay' + by = f(t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

exemple : $(E) : \quad 10y' + 2y = 45$

⚠ Il est d'usage de ne pas écrire $y(t)$ ou $y'(t)$.

2) Condition initiale

La fonction y est généralement dépendante du temps t .

On connaît la valeur de $y(0)$, c'est la **condition initiale**.

L'équation décrit le comportement du système étudié pour $t \geq 0$.

⚠ La condition initiale ne fait pas partie de l'équation.
C'est une information en plus.

II) La méthode

1) Ce qu'il faut résoudre

On veut résoudre l'équation :

$$(E) : ay' + by = f(t)$$

dans laquelle y est une fonction de t et y' est sa dérivée.

Nous connaissons la condition initiale $y(0)$.

Exemple :

$$(E) : 5y' + y = 20, \quad y(0) = 0$$

⚠ Avertissement – ne pas noter

En TSTL vous ne verrez que des équations de forme :

$$y' + ay = b$$

Il existe une formule toute faite :

$$y = \frac{b}{a} + Ke^{-at}, K \in \mathbb{R}$$

On pourrait se contenter d'apprendre cette formule par cœur, mais...

- Il est facile de se tromper quand ce n'est que du par cœur,
- une telle formule ne permet pas de comprendre grand chose,
- quand vous referez des équations différentielles dans le supérieur, on vous enseignera une autre méthode plus performante.

Donc, je préfère vous apprendre directement la méthode performante. Elle n'est pas difficile et est systématique donc fera plaisir à ceux qui aiment les méthodes par cœur.

2) Résoudre $y' = \alpha y$

Exemple : Pour quelle fonction y a-t-on $y' = 3y$?

- $y(t) = 10$?
- $y(t) = 0$?
- $y(t) = 12t + 3$?
- $y(t) = t^2$?
- $y(t) = 5e^{2t}$?
- $y(t) = 25e^{3t}$?
- $y(t) = Ke^{3t}$?

2) Résoudre $y' = \alpha y$

Exemple : Pour quelle fonction y a-t-on $y' = 3y$?

- $y(t) = 10$? $y' = 0 \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = 0$? $y' = 0 = 3y \Rightarrow$ OUI
- $y(t) = 12t + 3$? $y' = 12 \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = t^2$? $y' = 2t \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = 5e^{2t}$? $y' = 2 \times 5e^{2t} \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = 25e^{3t}$? $y' = 3 \times 25e^{3t} = 3y \Rightarrow$ OUI
- $y(t) = Ke^{3t}$? $y' = 3Ke^{3t} = 3y \Rightarrow$ OUI

2) Résoudre $y' = \alpha y$

Exemple : Pour quelle fonction y a-t-on $y' = 3y$?

- $y(t) = 10$? $y' = 0 \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = 0$? $y' = 0 = 3y \Rightarrow$ OUI
- $y(t) = 12t + 3$? $y' = 12 \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = t^2$? $y' = 2t \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = 5e^{2t}$? $y' = 2 \times 5e^{2t} \neq 3y \Rightarrow$ NON
- $y(t) = 25e^{3t}$? $y' = 3 \times 25e^{3t} = 3y \Rightarrow$ OUI
- $y(t) = Ke^{3t}$? $y' = 3Ke^{3t} = 3y \Rightarrow$ OUI

Les solutions ont la forme $y = K \cdot e^{3t}$, pour n'importe quel K .

Les solutions de

$$y' = \alpha \cdot y$$

s'écrivent

$$y = K \cdot e^{\alpha t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Les solutions de

$$y' = \alpha \cdot y$$

s'écrivent

$$y = K \cdot e^{\alpha t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

démonstration

Version simplifiée pour avoir l'idée :

$$y' = \alpha y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \alpha$$

À gauche on reconnaît une dérivée de $\ln(y)$. On peut primitiver des deux côtés.

$$\ln(y) = \alpha t + c \Rightarrow y = e^{\alpha t + c} = e^c \cdot e^{\alpha t}$$

On choisit $K = e^c$ et donc $y = K \cdot e^{\alpha t}$

3) Équation sans second membre

Étape 1 de la méthode

On considère l'équation **sans second membre** (E_0).

Il s'agit de l'équation sans $f(t)$.

$$(E_0) : ay' + by = 0$$

Il faut :

- la reformuler en $y' = \alpha \cdot y$,
- conclure $y_0 = K \cdot e^{\alpha \cdot t}$, $K \in \mathbb{R}$

On a mis une étiquette à y .

C'est la **solution générale** de l'équation sans second membre.

Exemple

$$5y' + y = 0$$

$$5y' + y = 0$$

$$y' = -\frac{1}{5}y \Rightarrow y_0 = K e^{-\frac{t}{5}}$$

- y_0 est une bonne solution à la mauvaise équation.
On le calcule parce que c'est un **morceau** de ce que l'on cherche.
- K est pour l'instant indéterminé.
C'est la **condition initiale** qui fixera K .
- (E_0) décrit la dynamique du système, sa façon de réagir quand on ne le perturbe pas.
- Dans l'équation, on doit reconnaître des paramètres physiquement pertinent.
Par exemple dans $5y' + y$, on sait que 5 est homogène à un temps.
Donc on est certain que 5 sera un temps caractéristique du système.

4) Solution particulière

Étape 2 de la méthode

On considère $f(t)$ et on essaie de deviner une solution à (E) .

- Si $f(t) = \text{Constant} \Rightarrow$, on essaie $y = \text{Constante}$,
- Si $f(t) = \text{Polynome} \Rightarrow$, on essaie $y = \text{Polynome de même degré}$,
- Si $f(t) = e^{kt} \Rightarrow$, on essaie $y = Ae^{kt}$
- etc.

Seul le premier est requis en TSTL

On note y_1 la solution trouvée. C'est une **solution particulière** de (E) .

Exemple

$f(t) = 20$, donc...

on essaie $y = c$, donc $y' = 0$,

on remplace dans (E) :

$$5 \times 0 + c = 20 \Rightarrow c = 20$$

On conclut que $y_1 = 20$ est **solution particulière** de (E).

Solution particulière signifie que c'est une solution parmi d'autre.

Par exemple, si je pose l'équation

$$x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 5x + 3 = 0$$

- On peut trouver au flair que $x = 1$ est une solution.
- La vérification est facile : on remplace x par 1 et on vérifie s'il y a égalité.
- Il y a peut-être d'autres solutions.

C'est la même chose avec y_1 .

5) Solution générale

Étape 3 de la méthode

Toutes les solutions de (E) s'écrivent :

$$y = y_1 + y_0$$

C'est la **solution générale de (E)** .

La solution générale de (E) est :

$$\begin{aligned}y &= y_1 + y_0 \\ &= 20 + K e^{-\frac{t}{5}}, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

démonstration

Supposons que u soit une solution de (E) . On sait que y_1 est aussi une solution de (E) . On a donc :

$$\begin{aligned} a u' + b u &= f(t) \\ a y_1' + b y_1 &= f(t) \end{aligned}$$

En faisant la soustraction des deux équations on obtient :

$$a u' - a y_1' + b u - b y_1 = 0 \Rightarrow a(u - y_1)' + b(u - y_1) = 0$$

On constate donc que $u - y_1$ doit être solution de (E_0) .

Donc $u - y_1 = y_0 \Rightarrow u = y_1 + y_0$.

Il faut comprendre que

- Toutes les solutions ont cette forme.
- Comme toutes les valeurs de K sont autorisées, il y a une infinité de solutions.
- Parmi toutes les solutions, nous allons voir qu'il n'y en a qu'une qui respecte la condition initiale.

6) Condition initiale

Étape 4 de la méthode

On calcule $y(0)$ avec la solution et on utilise la valeur connue de $y(0)$ pour choisir K .

On obtient **La solution de (E) qui respecte la condition initiale.**

$$y(0) = 20 + K e^{0} \stackrel{\text{cond. init.}}{=} 0 \Rightarrow K = -20$$

On conclut :

$$y(t) = 20 - 20, e^{-\frac{t}{5}}$$