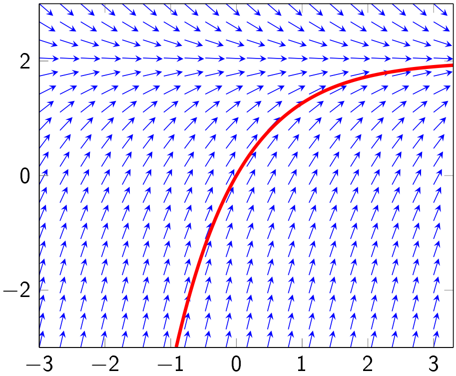


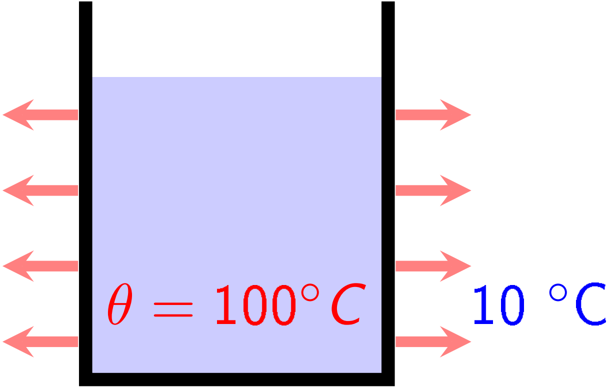
Des Équations différentielles pour quoi faire ?

Dans cette présentation, on envisage un expérience physique simple et on se demande comment en faire la modélisation physique.

I) Expérience

Un verre contient de l'eau à $\theta = 100° C$. L'air L'air ambiant est à $10° C$.

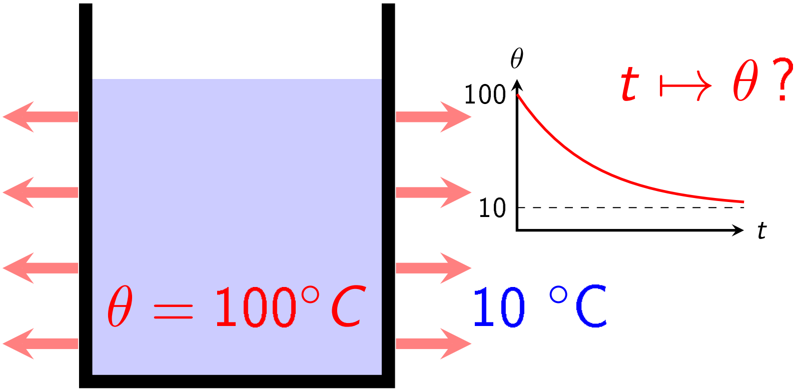
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.



I) Expérience

Un verre contient de l'eau à $\theta = 100° C$. L'air L'air ambiant est à $10° C$.

On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.
La température θ va baisser jusqu'à $10° C$.



II) Ce que l'on cherche

On s'intéresse à l'évolution de θ en fonction du temps.

Donc on cherche une **fonction** $\theta(t)$.

Les physiciens tendent à omettre « (t) ».

- Cela alourdirait les formules,
- en physique, une fonction peut dépendre de beaucoup d'entrées,
- dans certains cas, il n'est pas évident de savoir qui est l'entrée et qui est la sortie.

III) Modélisation

Supposons connu θ **maintenant**, à l'instant t.

Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \rightsquigarrow t+dt} \theta + d\theta$$

De quoi dépend $d\theta$?

III) Modélisation

Supposons connu θ **maintenant**, à l'instant t.

Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \rightsquigarrow t+dt} \theta + d\theta$$

De quoi dépend $d\theta$?
En première approximation $d\theta \propto$:

- le temps dt,
- la différence $\theta - 10$

  Plus est grand l'écart de température entre l'eau et l'air ambiant, plus l'échange d'énergie est grand.

On va supposer :

$$d\theta = -C \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

- Signe $-$ car on s'attend à $\theta \searrow$,
- C est un facteur positif de proportionnalité qui dépend sûrement de la matière du verre, son épaisseur, sa forme... et aussi des unités choisies !

IV) Équation différentielle

De la modélisation :

$$d\theta = -C \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

On déduit :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = -C \cdot (\theta - 10)$$

C'est une **équation différentielle** : une équation dont

- l'inconnue est une fonction θ
- l'inconnue apparaît avec ses dérivées θ', θ''...

V) Exploitation du modèle

Prenons par exemple $C = 0,05$. On sait :

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

condition init

t	0
θ	100
θ'	
$d\theta$	

V) Exploitation du modèle

Prenons par exemple $C = 0,05$. On sait :

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

condition init

t	0
θ	100
θ'	$-4,50$
$d\theta$	

(E)

V) Exploitation du modèle

Prenons par exemple $C = 0,05$. On sait :

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

condition init

t	0 $\xrightarrow{dt\,=\,0,2}$	$0,2$
θ	100 $\downarrow (E)$	
θ'	$-4,50$ $\downarrow dt \cdot \theta'$	
$d\theta$	$-0,9$	

V) Exploitation du modèle

Prenons par exemple $C = 0,05$. On sait :

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

	condition init		
t	0	$\xrightarrow{dt\,=\,0,2}$	$0,2$
θ	100 $\downarrow (E)$	$\longrightarrow$	$99,1$
θ'	$-4,50$ $\downarrow dt \cdot \theta'$		
$d\theta$	$-0,9$		

V) Exploitation du modèle

Prenons par exemple $C = 0,05$. On sait :

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

condition init

$dt = 0,2$

t	0	$0,2$	$0,4$
θ	100	$99,1$	$98,209$
θ'	$-4,50$	$-4,455$	
$d\theta$	$-0,9$	$-0,891$	

(E)

$dt \cdot \theta'$

V) Exploitation du modèle

Prenons par exemple $C = 0,05$. On sait :

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

condition init

$dt = 0,2$

t	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$
θ	100	$99,1$	$98,209$	$\approx 97,327$
θ'	$-4,50$	$-4,455$	$\approx -4,410$	$\cdots$
$d\theta$	$-0,9$	$-0,891$	$\approx -0,882$	

(E)

$dt \cdot \theta'$

Exercice : Avec le mode suite

Soit $\theta_n = \theta(n\,dt)$ avec $dt = 0,2$.

a) Que vaut θ_0 ?

b) Donnez la relation de récurrence, θ_{n+1} en fonction de θ_n.

c) Avec une calculette, affichez le tableau de valeur et cherchez pour quel n, θ_n passe en dessous de 30.

d) Déduisez-en le temps nécessaire pour que le verre refroidisse à $30^\circ C$.

Exercice : Avec le mode suite

Soit $\theta_n = \theta(n\,dt)$ avec $dt = 0,2$.

a) Que vaut θ_0 ?

b) Donnez la relation de récurrence, θ_{n+1} en fonction de θ_n.

c) Avec une calculette, affichez le tableau de valeur et cherchez pour quel n, θ_n passe en dessous de 30.

d) Déduisez-en le temps nécessaire pour que le verre refroidisse à $30° C$.

Correction

$$\theta_0 = 100 \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \theta_n - 0,2 \times 0,05(\theta_n - 10) = 0,99\theta_n + 0,1$$

$\theta_{149} \simeq 30,1$ et $\theta_{150} \simeq 29,9$. C'est donc pour $n = 150$, soit au bout de $150 \times 0,2 = 30$ unités de temps (pas précisées...)

Remarque

Le passage $\dfrac{d\theta}{dt} \to \theta'$ est juste dans la limite où $dt \to 0$. Notre calcul avec $dt = 0,2$ est donc approximatif.

On peut améliorer l'approximation en réduisant dt, mais cela augmente le temps de calcul.

Dans des cas **assez simples**, on peut trouver une expression théorique exacte de $\theta(t)$.