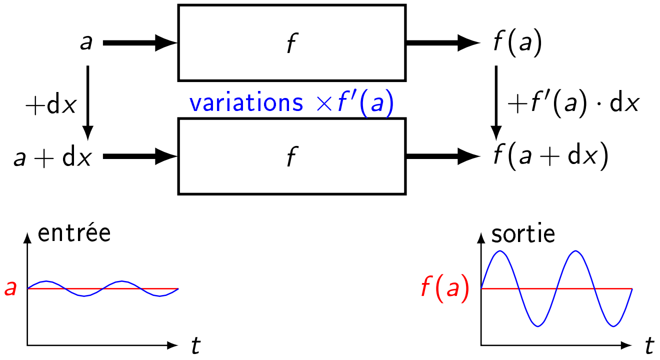
Dérivation et composition

I) Dérivée et variation (Rappel)



Si l'entrée varie de dx, la sortie varie de $\approx f'(a) \cdot \mathrm{d}x$

L'approximation repose sur le fait que si dx petit, $\mathrm{d}x^2 \ll \mathrm{d}x$.

Exemple :

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

a) Développer $f(a + \mathrm{d}x)$

b) Vérifier que $f(a + \mathrm{d}x) = f(a) + f'(a) \cdot \mathrm{d}x + (?) \cdot \mathrm{d}x^2$

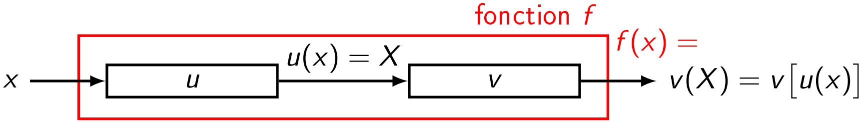
Si $\mathrm{d}x$ petit, alors $\mathrm{d}x^2$ est beaucoup plus petit.

Exemple : $\mathrm{d}x = 0,01 \Rightarrow \mathrm{d}x^2 = 0,0001$

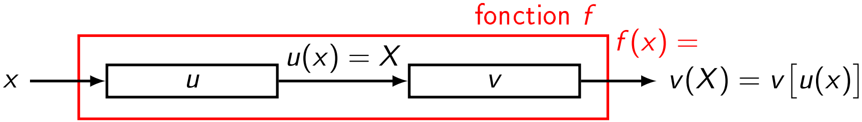
Dans ce cas, on peut **négliger** $\mathrm{d}x^2$ devant $\mathrm{d}x$.

On dit que c'est une approximation au **premier ordre**.

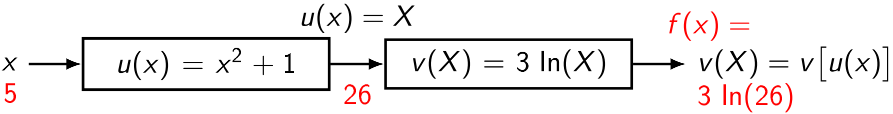
II) Composition



II) Composition



Exemple : $f(x) = 3\ \ln\left(x^2+1\right)$. Calculer pour $x = 5$.



$u(5) = 26$, donc $f(5) = v\left[u(5)\right] = v\left[26\right] = 3\ \ln(26)$.

II) Composition

$$x \longrightarrow \overbrace{\boxed{\quad u \quad} \xrightarrow{u(x) = X} \boxed{\quad v \quad}}^{\text{fonction } f} \longrightarrow f(x) = v(X) = v\left[u(x)\right]$$

Exemple : $f(x) = 3\ \ln\left(x^2+1\right)$. Calculer pour $x = 5$.

$$\underset{5}{x} \longrightarrow \boxed{u(x) = x^2+1} \xrightarrow[26]{u(x) = X} \boxed{v(X) = 3\ \ln(X)} \longrightarrow f(x) = \underset{3\ \ln(26)}{v(X)} = v\left[u(x)\right]$$

$u(5) = 26$, donc $f(5) = v\left[u(5)\right] = v\left[26\right] = 3\ \ln(26)$.

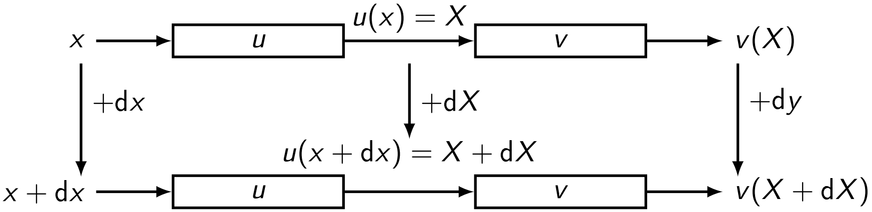
Notation

$$f(x) = v\left[u(x)\right] \Leftrightarrow f(x) = v \circ u(x)$$

Exercices du livre

- 4 – 7 page 221 : calculer $v \circ u(x)$
- 31 – 34 page 222 : reconnaître des compositions
- 35 QCM ; 36 Vrai Faux
- 37 : constatation que $v \circ u \neq u \circ v$.
- 39 – 43 : calcul $v \circ u(x)$
- 74 – 78 page 225 : reconnaître compositions

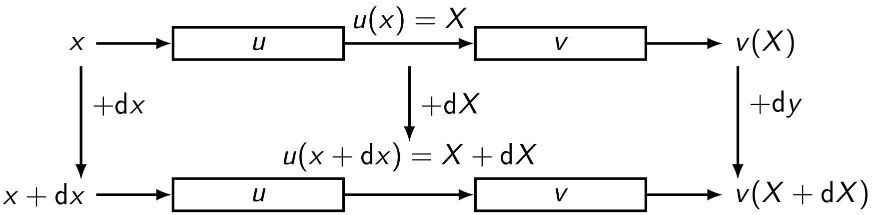
III) Dérivée composition



Quand l'entrée change de $\mathrm{d}x$, la sortie change de $\mathrm{d}y$.

On sait $\mathrm{d}y \approx m \times \mathrm{d}x$. Comment obtenir m ?

III) Dérivée composition



Quand l'entrée change de $\mathrm{d}x$, la sortie change de $\mathrm{d}y$.

On sait $\mathrm{d}y \approx m \times \mathrm{d}x$. Comment obtenir m ?

$$\mathrm{d}y = v'(X) \cdot \mathrm{d}X = v'(X) \cdot u'(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Donc $m = u'(x) \cdot v'(X) = u'(x) \cdot v'\big[u(x)\big]$.

Soit $f = v \circ u$, c'est à dire $f(x) = v\big[u(x)\big]$,

$$f' = u' \cdot \big(v' \circ u\big) \quad \text{càd} \quad f'(x) = u'(x) \cdot v'\big[u(x)\big]$$

Soit $f = v \circ u$, c'est à dire $f(x) = v\big[u(x)\big]$,

$$f' = u' \cdot \left(v' \circ u\right) \quad \text{càd} \quad f'(x) = u'(x) \cdot v'\big[u(x)\big]$$

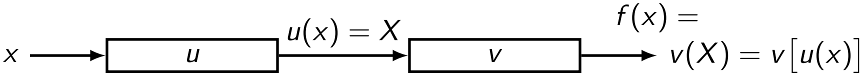
Exemple : $f(x) = 3\ \ln\left(x^2+1\right)$

$$x \longrightarrow \boxed{u(x) = x^2+1} \xrightarrow{u(x) = X} \boxed{v(X) = 3\ \ln(X)} \longrightarrow v(X) = v\big[u(x)\big]$$

$u'(x) = 2x$ et $v'(X) = \dfrac{3}{X}$.

On a donc $f'(x) = u'(x) \cdot v'(X) = 2x \cdot \dfrac{3}{x^2+1}$

Autre façon de dire la même chose :



On cherche $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}X} \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$$

Quand on écrit $\mathrm{d}f$ il faut comprendre la variation de $f(x)$. Idem $\mathrm{d}v$ est la variation de $v(X)$. De plus, ici, $X = u(x)$.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}X} = v'(X) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \quad \text{donc} \quad f'(x) = v'(X) \cdot u'(x)$$

Exercices du livre

- 8 – 22 page 221
- 45 – 48
- 49 QCM, 50 vrai/faux
- 51 – 62

IV) Formulaire

On remarque que le travail que l'on vient de faire dans les exercices est toujours le même. On voit que l'on pourrait développer des automatismes.

Cas $f = \ln(u)$

$$x \longrightarrow \boxed{\quad u \quad} \xrightarrow{u(x) = X} \boxed{\quad \ln \quad} \longrightarrow v(X)$$

$$v(X) = \ln(X) \text{ donc } v'(X) = \frac{1}{X} \text{ et } f'(x) = u'(x) \cdot v(X) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Si $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On le note souvent sans les x : $f = \ln(u) \Rightarrow f' = \dfrac{u'}{u}$

Cas $f = \exp(u)$

$$x \longrightarrow \boxed{\quad u \quad} \xrightarrow{u(x) = X} \boxed{\quad \exp \quad} \longrightarrow v(X)$$

$v(X) = e^X$ donc $v'(X) = e^X$ et $f'(x) = u'(x) \cdot v(X) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Si $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.

On le note souvent sans les x : $f = e^u \Rightarrow f' = u' \cdot e^{u'}$

De la même façon on trouve d'autres formules :

f	f'
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$e^{u'}$
u^n	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \cdot \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cdot \cos(u)$

Exemple : On veut dériver $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

On reconnaît la forme $\ln(u)$ avec $u = x^2 + 1$,

On a donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

V) Primitive

C'est là que la connaissance du tableau de dérivée est important.

Il faut reconnaître une forme.

Exemple : $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$

$f(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$

i. Ressemble à $\dfrac{u'}{u}$. On tente avec $u = x^2 + 1$,

ii. On fait un essai : $F(x) = \ln(u) = \ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

iii. On remarque qu'il manque un facteur 4 à $F'(x)$ pour correspondre à f. On décide donc de multiplier F par 4.

$$F(x) = 4\ln\left(x^2+1\right)$$

On a bien alors $F'(x) = f(x)$.

iv. Pour avoir une primitive générale, on ajoute $+c$

$$F(x) = 4\ln\left(x^2+1\right) + c$$

Remarque : en général, le $+c$ ne sert à rien.

Exercices du livre :

- 23 – 29 page 221
- 63 révision de cours
- 64 : QCM
- 65 : Vrai / Faux
- 66 – 73
- 84 – 89