EXERCICE 1 (5 points)

(physique-chimie et mathématiques)

Le pentaoxyde de diazote

Le pentaoxyde de diazote N_2O_5 est un puissant oxydant utilisé en synthèse organique. Il possède comme particularité d'être un (NO_x) solide à température ambiante. Sa manipulation requiert un soin tout particulier puisqu'à température ambiante, il peut se décomposer selon la transformation modélisée par la réaction d'équation :

$$N_2O_5 \longrightarrow 2\,NO_2 + \frac{1}{2}\,O_2$$

On se propose d'étudier la cinétique de cette réaction.

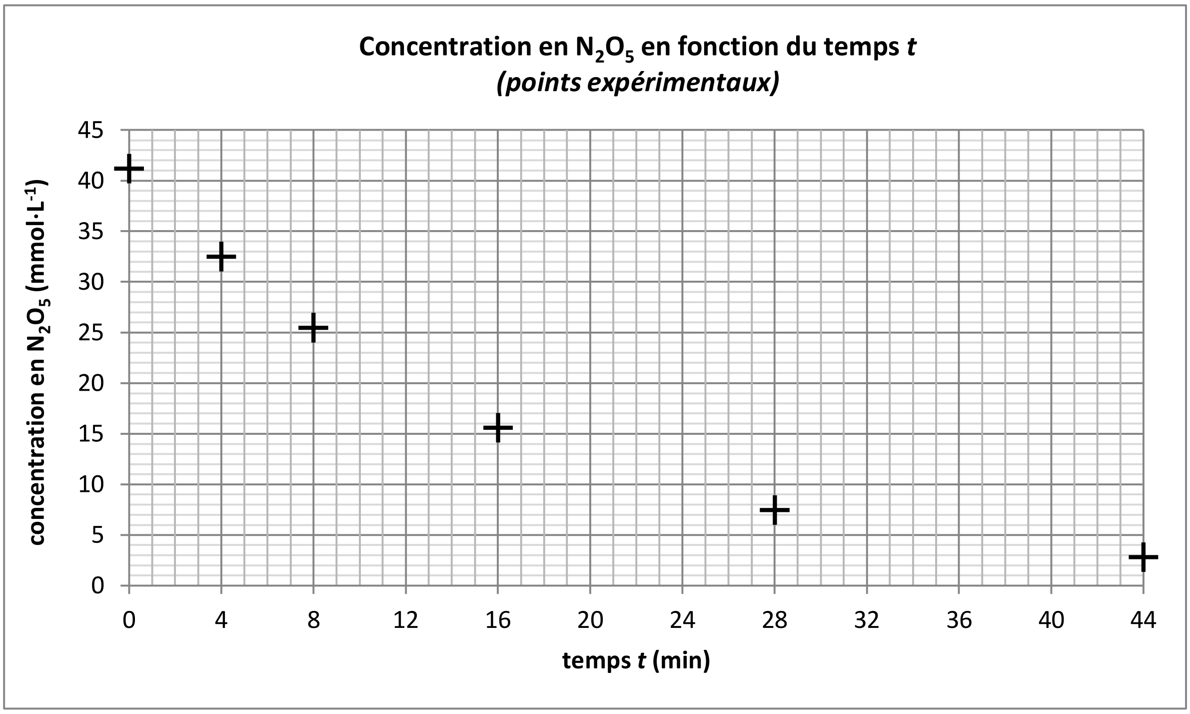
On introduit initialement, dans un réacteur de volume V égal à $1{,}0\ \mathrm{L}$, une masse m égale à $4{,}4\ \mathrm{g}$ de pentaoxyde de diazote.

Données : masses molaires atomiques respectives des éléments azote et oxygène $M(\mathrm{N}) = 14\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et $M(\mathrm{O}) = 16\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

1. Montrer que la concentration en quantité de matière en N_2O_5 à l'instant initial dans le réacteur est $[N_2O_5]_0 = 41\ \mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$.

On note t le temps écoulé à partir de l'introduction de la masse m. On effectue six mesures expérimentales de la concentration de pentaoxyde de diazote N_2O_5 dans le réacteur, notée $[N_2O_5]_t$, pour $t = 0\ \mathrm{min}$, $t = 4\ \mathrm{min}$, $t = 8\ \mathrm{min}$, $t = 16\ \mathrm{min}$, $t = 28\ \mathrm{min}$ et $t = 44\ \mathrm{min}$. On souhaite modéliser l'évolution de la concentration de pentaoxyde de diazote N_2O_5 par une fonction f donnant la concentration de pentaoxyde de diazote N_2O_5 dans le réacteur, exprimée en millimoles par litre, en fonction du temps exprimé en minutes.

Le document ci-dessous présente les points expérimentaux :



Pour une réaction d'ordre 0, on rappelle que la vitesse volumique de disparition est constante au cours du temps.

2. Justifier qu'on peut écarter l'hypothèse d'une cinétique d'ordre 0 par rapport au réactif pentaoxyde de diazote N_2O_5.

On fait l'hypothèse que la réaction suit une cinétique d'ordre 1 par rapport au réactif pentaoxyde de diazote N_2O_5, c'est-à-dire que la vitesse volumique de disparition du réactif vérifie la loi $v_{\text{disp }(N_2O_5)}(t) = k \times [N_2O_5]_t$ où k est la constante de vitesse.

En conséquence, on admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' + k \times y = 0$$

3. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;44]$ par $f(t) = 41 \times e^{-kt}$ est la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale $f(0) = 41$.

4. Montrer que $\ln(f(t)) = -kt + \ln(41)$.

On a représenté, dans le **document réponse DR1 page 9 à rendre avec la copie,** le logarithme népérien de la concentration de pentaoxyde de diazote obtenue dans l'expérience pour $t = 0\text{ min}$, $t = 4\text{ min}$, $t = 8\text{ min}$, $t = 16\text{ min}$, $t = 28\text{ min}$ et $t = 44\text{ min}$. La droite tracée approxime les points.

5. Justifier que l'hypothèse d'une cinétique d'ordre 1 par rapport au réactif pentaoxyde de diazote N_2O_5 est compatible avec les données expérimentales.

6. Déterminer le coefficient directeur de la droite tracée sur le **document réponse DR1 page 9 à rendre avec la copie**.

7. En déduire que la valeur de la constante de vitesse k est environ égale à $0{,}063\text{ min}^{-1}$.

8. Calculer la valeur de $\ln\left(\frac{[N_2O_5]_0}{2}\right)$ puis résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 20{,}5$ en laissant la trace permettant de comprendre la lecture réalisée sur le **document réponse DR1 page 9 à rendre avec la copie**.

9. Grâce à l'expression $f(t) = [N_2O_5]_t = [N_2O_5]_0 \times e^{-kt}$, montrer que le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ s'exprime par la relation :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}.$$

10. Calculer la valeur numérique du temps de demi-réaction $t_{1/2}$.

11. Comparer les résultats des questions 8 et 10.

EXERCICE 3 (4 points)

(mathématiques)

Dans cet exercice, les quatre questions sont indépendantes.
Il faut traiter les quatre questions.

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{5x} + 1$.
Calculer $f(0)$ en détaillant les calculs.

Question 2

Résoudre sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ l'équation $\ln(2x+1) = 7$.

Question 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x^2 + 10x$.
Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

Question 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7$.
On note F la fonction primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + 7x$.
Déterminer

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC LA COPIE

DR1 – Exercice 1 :