EXERCICE 1 commun à tous les candidats (4 points)

(physique-chimie et mathématiques)

Lorsqu'un objet est lâché dans un fluide (air, eau, etc.), il subit, outre son poids et la poussée d'Archimède, des forces de frottement fluide. La modélisation de ces forces de frottement fluide conduit à considérer que :

- lorsque la vitesse de l'objet v est « faible », l'intensité des forces de frottement fluide est proportionnelle à v ;
- lorsque la vitesse de l'objet v est « élevée », l'intensité des forces de frottement fluide est proportionnelle à v^2.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier expérimentalement le modèle des forces de frottement fluide dans le cas des faibles vitesses.

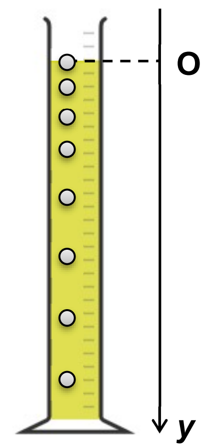
Étude expérimentale

On filme, à l'aide d'une webcam réglée à 50 images par seconde, la chute d'une bille d'acier dans l'huile d'olive contenue dans une éprouvette graduée. La bille est lâchée sans vitesse initiale par un électroaimant dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La vidéo est ensuite analysée image par image à l'aide d'un logiciel approprié qui permet de repérer la position instantanée du centre G de la bille suivant un axe (Oy) vertical orienté vers le bas.

La vitesse instantanée à un instant t_i est alors approchée par la vitesse moyenne entre les instants t_i et t_{i+1}. L'évolution, au cours du temps, de la valeur expérimentale de la vitesse v de la bille est représentée sur le **document réponse DR1 page 14, à rendre avec la copie**.

Chronophotographie de la chute de la bille



<u>Données</u> :

- Intensité de la pesanteur : g = 9,8 m·s^{-2}
- Masse de la bille : m = 4,1 g
- Rayon de la bille : R = 5,0 mm
- Masse volumique de l'huile à 20 °C : ρ_{hui} = 920 kg·m^{-3}
- Viscosité de l'huile à 20°C : η = 0,39 Pa·s
- Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi \times R^3$

1. Déterminer graphiquement, en ajoutant les traits de construction utiles sur le **document réponse DR1 page 14, à rendre avec la copie** :

- la valeur de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la bille ;
- le temps caractéristique τ d'évolution de la vitesse.

Étude théorique du mouvement de la bille

On étudie le mouvement du système « bille », plongée dans l'huile, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Lors de sa chute, la bille est soumise à plusieurs actions mécaniques :

- son poids $\vec{P}$;
- la poussée d'Archimède, notée $\vec{\prod}$, de sens contraire à celui du poids et d'expression $\vec{\prod} = -\rho_{huile} \cdot V_{im} \cdot \vec{g}$ où ρ_{huile} est la masse volumique de l'huile en kg·m^{-3}, V_{im} le volume immergé de l'objet en m^3 et g l'intensité de la pesanteur en m·s^{-2} ;
- la force de frottement $\vec{f}$ de l'huile sur la bille, que l'on suppose ici proportionnelle à la vitesse de chute de la bille avec $\vec{f} = -6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot \vec{v}$ où η est la viscosité de l'huile en Pa·s, R le rayon de la bille en m et v la vitesse de la bille en m·s^{-1}.

2. Écrire l'expression vectorielle de la seconde loi de Newton appliquée au système « bille ».

3. Par projection de l'expression vectorielle de la seconde loi de Newton sur l'axe (Oy), établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la bille. Écrire cette équation différentielle sous la forme $\frac{dv}{dt} = A \times v + B$ et exprimer les coefficients A et B en fonction de m, g, ρ_{huile} , η et R.

4. À l'aide des données, poser explicitement les calculs qui permettraient de déterminer la valeur numérique du coefficient A en s^{-1} et celle du coefficient B en m·s^{-2}. Les applications numériques ne sont pas à réaliser.

Pour établir l'expression de la vitesse de la bille, les données physiques de l'expérience conduisent à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -9\,y + 8{,}6$.

5. Déterminer la fonction solution de l'équation différentielle (E) s'annulant en 0.

6. Montrer que la limite de $0{,}96\,(1 - e^{-9t})$ lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à $0{,}96$.

Dans le contexte de l'expérience, on prendra, pour exprimer la vitesse de la bille en fonction du temps t, la fonction v définie sur $[0\,;\,0{,}8]$ par $v(t) = 0{,}96\,(1 - e^{-9t})$. La vitesse de la bille est exprimée en m.s^{-1} et le temps t est exprimé en secondes.

7. Expliquer en quoi la comparaison de la valeur obtenue à la question 6 aux résultats de l'étude expérimentale fournit un argument en faveur du choix du modèle des forces de frottement fluide effectué en début d'exercice.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (4 points)
(mathématiques)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six que comporte l'exercice.

Les questions sont indépendantes.

Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point.

Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Question 1

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (8x - 2)e^{-x}$$

On note f' sa fonction dérivée.

Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 2

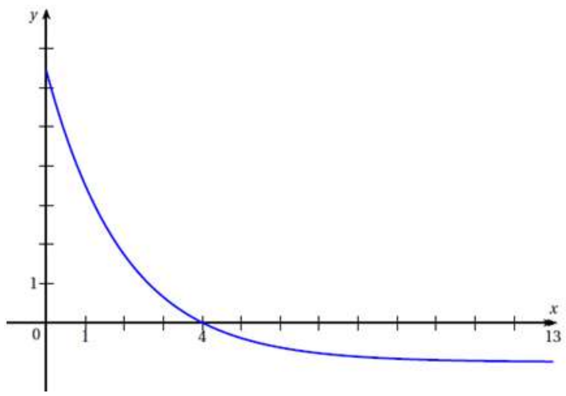
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (8x - 2)e^{-x}$$

Résoudre $f(x) = 0$.

Question 3

On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 13].
On note g' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la <u>fonction dérivée</u> g' sur l'intervalle [0 ; 13].



Julien affirme que la fonction g est décroissante sur l'intervalle [0 ;13].
Julien a-t-il raison ? Justifier.

Question 4

Montrer que $\frac{\ln(\sqrt{8})}{\ln(\sqrt{2})} = 3$.

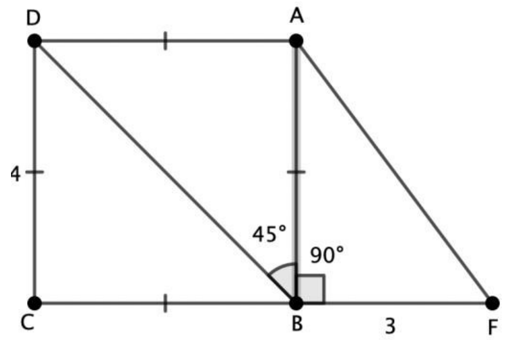
Question 5

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{6x} - 1$.

Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$.

Question 6

ABCD est un carré de côté 4 et ABF est un triangle rectangle en B avec BF= 3 comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BD}$