Dans ce TD on montre comment s'impose un choix de changement de variable dans le cadre d'un ajustement.

I. Le modèle

On considère du liquide qui refroidit dans un récipient.

On note $\theta(t)$ la fonction représentant la température du liquide en $^\circ C$, en fonction du temps t en minutes.

On fait l'hypothèse que le système suit l'équation suivante :

$$(E): \quad \mathrm{d}\theta = -\frac{k}{m} \cdot (\theta - \theta_{amb}) \cdot \mathrm{d}t$$

ou θ_{amb} est la température ambiante et m est la masse de liquide en kg. On suppose m et θ_{amb} constants.

Ce modèle revient à dire que le refroidissement du récipient dans un temps dt très court est **proportionnel** à l'écart entre la température actuelle θ et la température ambiante θ_{amb}. Le m au dénominateur revient à supposer qu'il est $2\times$ plus long de refroidir une masse $2\times$ plus grande.

On ne connaît pas la valeur de la constante k et on va essayer de la déterminer expérimentalement.

a) Quel est l'unité de k ?

b) Reformuler (E) en faisant apparaître θ'.

c) Résoudre l'équation sans second membre (E_0).

d) Proposer une solution particulière de (E).

e) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

f) Soit $\theta(0) = \theta_{init}$. Donner l'expression de la solution de (E) respectant cette condition initiale.

II. L'expérience

On a fait l'expérience et on a obtenu les résultats suivants :

t en min	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
θ en $^\circ C$	50	44	38	34	31	28	26	24	22	21

On sait par ailleurs que $\theta_{amb} = 15^\circ C$ et $m = 2\,kg$.

Les mesures données dans ce tableau sont potentiellement entachées d'erreur. Comme nous désirons trouver la valeur de k, il faudrait chercher la valeur qui donne une courbe au plus près des points du tableau. Il s'agit d'un ajustement.

L'expression de $\theta(t)$ n'est pas affine, on ne peut donc faire directement un ajustement affine. Néanmoins on peut se ramener à un ajustement affine par un calcul simple.

a) Soit $z = \ln(\theta)$. Donner l'expression de z en utilisant l'expression de θ trouvée dans la section précédente.

On constate que z est une fonction affine de t.

b) Faire l'ajustement affine de z en t.

c) En déduire la valeur de k.

Remarque : l'ajustement affine cherche a et b tels que $z = a\,t + b$. Ici, k est lié à a et θ_{init} est lié à b. Si on veut fixer la valeur de θ_{init} cela aura pour effet de fixer b et il ne faudra jouer que sur a pour obtenir la meilleure réponse. Mais vos calculatrices ne permettent pas de faire cela (Avec un tableur c'est possible) Il faut donc laisser la calculatrice ajuster la valeur de b et donc la courbe retenue ne passera pas forcément par $\theta(0) = 50\,^\circ C$. Mais cela n'est pas gênant puisque nous avons dit que les mesures de températures n'étaient pas exactes.