Calcul littéral : Racine carrée

Rappel définition

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
x^2	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $0 \leqslant a$, $\sqrt{a}$ est l'**unique** solution positive de x^2.

De cette définition, il vient :

$$0 \leqslant \sqrt{a} \text{ et } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

À prouver

Vous n'utiliserez que des propriétés connues concernant les manipulations d'inégalités/égalités, les propriétés de la fonction ***carré*** *et la définition de la racine.*

(a) Justifier que $0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

On en conclut que la fonction **racine** est **strictement croissante**.

(b) Justifier que pour tout $M \in \mathbb{R}$, on peut trouver a tel que $\sqrt{a} \geqslant M$.

Cela en plus du point précédent montre que la fonction **racine** $\nearrow^{+\infty}$.

(c) Montrer que pour a et b positifs, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

(d) Montrer que pour a et b positifs, $b \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(e) On veut prouver que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Pour cela :

i. développer $\left(\sqrt{a+b}\right)^2$,

ii. développer $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$,

iii. comparer et conclure.

> **Attention :** en général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
> Le seul cas où il y a égalité est quand $a = 0$ ou $b = 0$.

(f) On s'intéresse à $(\sqrt{a})^2$.

i. Pour quelles valeurs de a cette quantité est-elle définie ?

ii. Justifier que cette quantité est égale à a.

(g) On s'intéresse à $\sqrt{a^2}$.

i. Pour quelles valeurs de a cette quantité est-elle définie ?

ii. Justifier que $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0, \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$ on note cela $|a|$.

Des deux calculs précédents, on déduit que $(\sqrt{a})^2$ *n'est pas exactement la même chose que* $\sqrt{a^2}$. *Mais si on se limite à* $a \geq 0$, *les deux calculs donnent le même résultat.*

(h) On sait que $0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$ car tout carré est positif.

i. développer,

ii. en déduire que $\sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{a+b}{2}$