S'il est faux que « Toutes les voitures rapides sont rouges », peut-on conclure que « Toutes les voitures rapides ne sont pas rouges » ? C'est ce à quoi on va essayer de répondre dans ce TD.

Les expressions « quel que soit... » et « il existe au moins un... » sont appelées **quantificateurs**. Ils servent à préciser quels sont les éléments qui vérifient une propriété, « tous » ou « certains ».

1 Quantificateur universel

On dit : « quel que soit... », « pour tout... », et on peut utiliser le symbole $\forall$.

Dites quelle propriété est vraie et réfutez la fausse par un contre-exemple :

1. Quelque soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$. (On pourrait écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$)
2. Tout parallélogramme a des diagonales de mêmes longueurs.

2 Quantificateur existentiel

On dit « il existe un... », et on peut utiliser la notation $\exists$.

Dites quelle est la proposition vraie et réfutez la fausse :

1. Il existe un entier naturel divisible par 2 et par 3. (On pourrait écrire $\exists n \in \mathbb{N}, 2|n$ et $3|n$)
2. Il existe un triangle ABC tel que $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 100°$.

3 Négation

Vous l'avez vu, dans les propriétés on avait des formulations de la forme :

— « Il existe x tel que A » (ou A est une propriété logique). Nier cette proposition revient à affirmer : « Pour tout x, $\overline{A}$ ».

— « Pour tout x, A ». Nier cette proposition revient à affirmer : « Il existe x tel que $\overline{A}$ ».

Exprimez la négation de « Toutes les voitures rapides sont rouges ».

4 Exercices

1. f est une fonction définie sur $[-4 ~;~ 4]$ dont le tableau de variation est donné ci-contre. En exploitant les informations données, justifiez pour chacune des propositions, si elle est vraie ou fausse.

x	-4		-1		4
$f(x)$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

   (a) Il existe un nombre de $[-4 ~;~ 4]$ qui a une image strictement négative par f.
   (b) Tous les nombres de $[-4 ~;~ 4]$ ont une image strictement négative par f.
   (c) Tous les nombres de $[-4 ~;~ 4]$ ont une image strictement inférieure à 3 par f.
   (d) Il existe un nombre de $[-4 ~;~ 4]$ qui a une image supérieure à 3 par f.

2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   (a) Il existe un réel x tel que $x^2 = 36$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$
   (c) Pour tout x réel, $x^2 = -2x + 3$.
   (d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -2x + 3$.
   (e) Pour tout réel $x \neq 4$, $\dfrac{3x-10}{x-4} = \dfrac{2}{x-4} + 3$
   (f) Il existe un réel x tel que $\dfrac{3x-10}{x-4} = 3$.
   (g) Il existe un réel x tel que $\dfrac{2}{x-4} = 3$.
   (h) Il existe un réel x tel que $-x^2 + 4x - 2 \leqslant -(x-2)^2$.
   (i) Pour tout réel x, $x - x^2 + 4x - 2 \leqslant -(x+3)^2$.
   (j) $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x = 0$.