

1 Présentation

Une phrase du type « **Si** j'en ai le temps, **alors** je lis un livre. » est une implication.

« **Si** P **Alors** Q » ce qui peut s'écrire $P \Rightarrow Q$ où P et Q sont des **propositions logiques**.
 $P \Rightarrow Q$ se lit « P **implique** Q ».

Exemple : « $ABCD$ est un losange $\Rightarrow (AC) \perp (BD)$ » est une implication **vraie**. En effet, sans aucune exception, si $ABCD$ est un losange, alors on aura bien $(AC) \perp (BD)$. Autrement dit, si la proposition « $ABCD$ est un losange » est vraie, alors la proposition « $(AC) \perp (BD)$ » est vraie également.

En revanche, si « $ABCD$ est un losange » est fausse, on ne peut rien affirmer au sujet de « $(AC) \perp (BD)$ ».

P	$P \Rightarrow Q$	Q
V	V	
V	F	
F	V	
	V	V
	V	F

Attention : Une implication est une proposition logique qui peut être vraie ou fausse. En effet, rien n'empêche d'écrire « $ABCD$ est un carré $\Rightarrow AB > CD$ » mais cette implication est fausse.

2 Démontrer que $P \Rightarrow Q$

Pour démontrer que « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, il faut trouver un raisonnement qui, partant de l'**hypothèse** que P est vraie, aboutira à la conclusion que Q est vraie également. En revanche, pour démontrer que « $P \Rightarrow Q$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple pour lequel on a P vraie et Q fausse.

Pour chacune des phrases suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, trouvez un contre-exemple.

- Si je suis français, alors je suis européen.
- $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
- Si $ab = 0$, alors $a = 0$ OU $b = 0$
- Si $ABCD$ est un rectangle, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si d et d' sont deux droites perpendiculaires du plan alors d et d' sont sécantes
- Si ABC est un triangle rectangle en A , alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

3 Réciproque et équivalence

La réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $P \Leftarrow Q$ ou, mis dans l'autre sens, $Q \Rightarrow P$. **Pour toutes les implications de l'exercice précédent, donnez les réciproques et indiquez lesquelles sont vraies.**

Quand $P \Rightarrow Q$ est vrai et $P \Leftarrow Q$ aussi, on dit qu'il y a équivalence : $P \Leftrightarrow Q$. C'est la situation la plus forte : P et Q ont toujours la même valeur. Indiquez les équivalences dans l'exercice précédent.

4 Exemple géométrique

On considère 3 points A , B et K du plan et 5 propositions. Indiquez les implications et équivalences.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (1) K milieu de $[AB]$ | (4) $AK + KB = AB$ |
| (2) triangle AKB isocèle en K | (5) K appartient à la médiatrice de $[AB]$ |
| (3) $KA = KB$ | (6) $AK \leq KB$ |

5 La conférence

Dans une conférence on rencontre des visiteurs de divers pays. Tous les américains présents portent une chemise rouge. Que pensez vous des affirmations suivantes :

- Si on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge, alors c'est un Américain
- Si on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche, alors il n'est pas américain
- Si on voit un Russe, alors il porte une chemise rouge ?
- Si on voit un américain, alors il une porte chemise rouge ?