

Considérons un triangle ABC quelconque. On souhaite prouver quelques formules et propriétés générales en utilisant un repère orthonormé. On supposera A , B et C non alignés.

1 Deux approches possibles

1.1 Repère quelconque

Une première approche peut consister à considérer ABC dans un repère orthonormé préexistant. Dans ce repère, les trois points ont des coordonnées quelconques : $A(x_A y_A)$, $B(x_B y_B)$ et $C(x_C y_C)$ et la contrainte de non alignement se traduit par un déterminant non nul :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \neq 0$$

Cette approche est assez compliquée du fait de l'existence de six variables et d'une contrainte compliquée à énoncer.

1.2 Repère adapté

On peut aussi construire un repère orthonormé exprès :

- On définit l'unité de longueur en prenant $AB = 1$ unité. Si par exemple AB fait 3 cm alors toutes les distances calculées seront à multiplier par 3 cm pour obtenir des valeurs réelles.
- On construit un point X de sorte que ABX soit isocèle rectangle en A .

De cette façon, $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AX})$ est orthonormé.

Dans ce repère, que l'on peut toujours construire, on a $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(\alpha; \beta)$ et la contrainte de non alignement se traduit simplement par $\beta \neq 0$.

Cette solution est beaucoup plus simple et est satisfaisante dans de nombreux cas. Il n'y a plus que 2 variables α (alpha) et β (beta) et la contrainte est très simplement exprimée.

On utilisera cette approche.

2 Médiatrices

2.1 Médiatrice de $[AB]$

Le milieu de $[AB]$ est $C'(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}) = C'(\frac{1}{2}; 0)$

La droite (AB) a pour équation $y = 0$ (évident)

La médiatrice $\Delta_{[AB]}$ aura donc une équation de forme $x = x_{C'}$ donc $x = \frac{1}{2}$.

2.2 Médiatrice de $[AC]$

(AC) pourrait être verticale ou oblique (mais pas horizontale car $(AB) \nparallel (AC)$) donc on doit utiliser une équation cartésienne pour couvrir tous les cas.

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ est orthogonal à \overrightarrow{AC} et est donc un vecteur directeur de la médiatrice.

Remarque : comme $\beta \neq 0$ on est certain que ni \overrightarrow{AC} ni \vec{u} ne sont des vecteurs nuls.

La médiatrice a donc pour équation (tenant compte de son vecteur directeur \vec{u}) :

$$\Delta_{[AC]} : \alpha \cdot x + \beta \cdot y + c = 0$$

Et il faut encore trouver la valeur de c en tenant compte du fait que cette droite passe par B' , milieu de $[AC]$.

$$B' \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = B' \left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2} \right)$$

Donc en mettant les coordonnées de C' dans l'équation de la médiatrice :

$$\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} + \beta \cdot \frac{\beta}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

Conclusion :

$$\Delta_{[AC]} : \alpha \cdot x + \beta \cdot y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0$$

2.3 Existence du centre du cercle circonscrit

Ω est le centre du cercle circonscrit, c'est à dire l'unique point équidistant de A , B et C .

Prouvons déjà l'existence de ce point et son lien avec les médiatrices.

On sait qu'une médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

- Les points de $\Delta_{[AB]}$ sont donc les points M tels que $MA = MB$.
- Les points de $\Delta_{[AC]}$ sont donc les points M tels que $MA = MC$.
- On sait que $y_C \neq 0$. L'équation de $\Delta_{[AC]}$ peut donc se mettre sous la forme $y = mx + p$. C'est donc une droite oblique ou horizontale.

La droite $\Delta_{[AC]}$ est verticale. Donc les deux médiatrices ne sont pas parallèles et ont un point commun.

Ce point, unique, commun vérifie : $MA = MB$ et $MA = MC$. Ce point est donc tel que $MA = MB = MC$. C'est donc le centre du cercle circonscrit.

De plus, on a $MC = MB$ de sorte que ce point est aussi sur la médiatrice de $[BC]$. Les trois médiatrices sont donc bien concourantes.

2.4 Coordonnées du centre du cercle circonscrit

$\Omega \in \Delta_{[AB]} : x = \frac{1}{2}$ et $\Omega \in \Delta_{[AC]} : \alpha \cdot x + \beta \cdot y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0$. Il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x dans la seconde équation :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \frac{1}{2} + \beta \cdot y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0 &\Leftrightarrow \beta \cdot y = -\alpha \cdot \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}{2\beta}\end{aligned}$$

$$\Omega \left(\frac{1}{2}; \frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}{2\beta} \right)$$

Noter que nous avons le droit de diviser par y_C car nous savons que $y_C \neq 0$.

3 Hauteurs

3.1 Hauteur issue de C

h_C est la perpendiculaire à (AB) passant par C , donc d'équation $h_C : x = x_C$.

$$h_C : x = \alpha$$

3.2 Hauteur issue de B

Comme pour la médiatrice de $[AC]$, la hauteur h_B aura la forme :

$$h_B : \alpha \cdot x + \beta \cdot y + c = 0$$

Tenant compte que $B(1; 0) \in h_B$ on a :

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = -\alpha$$

Et donc

$$h_B : \alpha \cdot x + \beta \cdot y - \alpha = 0$$

3.3 Intersection de h_C et h_B

On va déterminer les coordonnées de $H = h_B \cap h_C$ et on prouvera ensuite que ce point est aussi sur h_A .

$$\begin{cases} x = \alpha \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y - \alpha = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x par α dans la seconde équation :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \alpha + \beta \cdot y - \alpha = 0 &\Leftrightarrow \beta \cdot y = -\alpha^2 + \alpha \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-\alpha^2 + \alpha}{\beta}\end{aligned}$$

$$H \left(\alpha; \frac{-\alpha^2 + \alpha}{\beta} \right)$$

3.4 Orthocentre

On définit l'orthocentre comme l'intersection des trois hauteurs. Donc H est l'orthocentre. Encore faudrait-il prouver que $H \in h_A$. Pour cela il faut montrer que \overrightarrow{AH} est orthogonal à \overrightarrow{BC} .

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{-\alpha^2 + \alpha}{\beta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

L'orthogonalité est donc équivalente à :

$$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{AH}} \cdot x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AH}} \cdot y_{\overrightarrow{BC}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha \cdot (\alpha - 1) + \frac{-\alpha^2 + \alpha}{\beta} \cdot \beta &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - \alpha^2 + \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

L'égalité est bien vérifiée, on a donc bien $(AH) \perp (BC)$ et donc $H \in h_A$.

Les trois hauteurs sont donc bien concourantes en H .

4 Centre de gravité

$$\text{On sait que } G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = G \left(\frac{1 + \alpha}{3}; \frac{\beta}{3} \right).$$

Il n'y pas d'angle droit dans la définition de G comme intersection des médiane. Nous avons déjà abordé cela dans des exercices précédents, avant d'étudier les repères ortho-normés, je ne détaille donc pas plus.

5 Droite d'Euler

Nous avons donc trois points :

$$\Omega \left(\frac{1}{2}; \frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}{2\beta} \right) \quad H \left(\alpha; \frac{-\alpha^2 + \alpha}{\beta} \right) \quad G \left(\frac{1 + \alpha}{3}; \frac{\beta}{3} \right)$$

Nous devons montrer qu'ils sont alignés.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega H} &= \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} \\ \frac{-\alpha^2 + \alpha}{\beta} - \frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}{2\beta} \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{\Omega H} = \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 \\ \frac{-3\alpha^2 + 3\alpha - \beta^2}{\beta} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\Omega G} &= \begin{pmatrix} \frac{1 + \alpha}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}{2\beta} \end{pmatrix} \Rightarrow 6 \cdot \overrightarrow{\Omega G} = \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 \\ \frac{2\beta^2 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 3\beta^2}{\beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate donc que $2 \cdot \overrightarrow{\Omega H} = 6 \cdot \overrightarrow{\Omega G}$ soit :

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3 \cdot \overrightarrow{\Omega G}$$

Et donc, les vecteurs étant colinéaires, les trois points sont toujours alignés. On peut même affirmer que le point G est toujours sur le segment $[\Omega H]$.