Exercice 1. Loi des moyennes

Une usine produit des disques en grande série. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque disque, pris au hasard, associe son diamètre. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

On prélève au hasard des échantillons de 100 disques. On note $\overline{X_{100}}$ la variable aléatoire qui pour chaque échantillon associe la moyenne des diamètres des 100 disques.

a) Quelle est la loi suivie par $\overline{X_{100}}$?

b) Calculez $p(49,7 \leq \overline{X_{100}} \leq 50,3)$

c) Déterminez a pour que $p(\mu - a \leq \overline{X_{100}} \leq \mu + a) = 0,95$.

Exercice 2. Loi des moyennes (bis)

Un traceur produit des cartouches ayant une forme de rectangle dont la longueur doit être de 10 cm. Pour tester le réglage du traceur, on prélève 100 feuilles. Soit X la variable aléatoire qui pour chaque feuille associe la longueur du cartouche. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $m = 10$ et d'écart-type $\sigma = 0,03$. On note $\overline{X_{100}}$ la variable qui à chaque échantillon associe la moyenne des longueurs.

a) Quelle est la loi suivie par $\overline{X_{100}}$?

b) Déterminez le réel positif h tel que $p\left(m - h \leqslant \overline{X_{100}} \leqslant m + h\right) = 0,95$.

Exercice 3. Loi des fréquences

Une entreprise produit une grande série de pièces pour le bâtiment. Pour analyser la qualité de la production, on prélève au hasard un échantillon de $n = 200$ pièces. On suppose que le pourcentage de pièces défectueuses dans la production est de $p = 4\,\%$. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de n pièces associe la fréquence de pièces défectueuses dans cet échantillon.

a) quelle est, approximativement, la loi suivie par F ? Précisez-en les paramètres.

b) Quel est la probabilité que sur un échantillon donné, la fréquence de pièce défectueuses soit comprise entre 3 % et 5 % ?

c) Déterminez le réel a tel que $p(0,04 - a \leqslant F \leqslant 0,04 + a) = 0,95$.

d) Quelle valeur doit-on donner à n pour que $p(0,03 \leqslant F \leqslant 0,05) = 0,99$

Exercice 4. Loi des fréquences

Dans une population, on constate qu'il y a 28 % de fumeurs. On prend un échantillon de 400 personnes.

a) Quel est la probabilité d'avoir dans cet échantillon un pourcentage de fumeurs compris entre 26 % et 30 % de fumeurs ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir dans cet échantillon un pourcentage de fumeurs inférieur à 22 % ?

Exercice 5. Estimation ponctuelle et I_C

Une entreprise fabrique des tiges métalliques. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres.

On prélève au hasard un échantillon de $n = 50$ tiges dans la production d'une journée.

Dans l'échantillon, on a observé $\mu_e = 9,99$ et $\sigma_e = 0,19$.

a) À partir de ces informations, donnez une estimation ponctuelle de la moyenne μ des diamètres des tiges produites dans une journée.

b) Déterminez un intervalle de confiance de la moyenne μ à 95%.

c) On considère l'affirmation : « μ appartient obligatoirement à l'intervalle de la question précédente ». Cette affirmation est-elle vraie ?

Exercice 6. Intervalle de confiance

On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. On a prélevé un échantillon de 100 lots de 5 kg dans la production d'une journée. On a obtenu les résultats suivants, où P_i représente la masse de produit en grammes, et n_i l'effectif correspondant.

P_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

a) Calculez μ_e et σ_e.

b) Déduisez-en une estimation ponctuelle de μ et σ de masse de produit dans la production de la journée.

c) Donnez un intervalle de confiance de la moyenne μ avec le coefficient de confiance de 5%.

d) même question avec un coefficient de confiance de 99 %.

Exercice 7. Intervalle de confiance

Dans une ville, la proportion p de ménages qui possèdent au moins un téléviseur est inconnue.

On interroge 400 ménages. 327 de ces ménages possèdent au moins un téléviseur.

a) Donnez une estimation ponctuelle de p.

b) Donnez une estimation de p par intervalle de confiance avec le risque 5%.

c) Quelle taille d'échantillon aurait-il fallu prendre pour obtenir un intervalle de confiance à ± 2 %, avec un taux de confiance de 99 % ?

Exercice 8. Test de validité bilatéral

Une usine fabrique des roues dentées dont le diamètre annoncé est de 23,65 mm.

Un client commande un lot et veut vérifier que les roues dentées ont bien le diamètre annoncé. Il prend un lot de 100 roues et obtient une moyenne $\overline{x_e} = 23{,}644$ mm et un écart-type $\sigma_e = 0{,}018$ mm.

Le client estime que l'écart-type de l'échantillon est une bonne estimation de la totalité du lot. Peut-il admettre, au risque de 5 %, l'affirmation du fournisseur ?

Exercice 9. Test de validité unilatéral

Une entreprise a constaté qu'un certain nombre de ballons d'eau chaude qu'elle installe ont un défaut de fonctionnement. On s'intéresse à la fréquence de ballons installés ayant un défaut.

Suivant des statistiques plus anciennes, le service qualité annonce que la fréquence de défaut est de 5 %. Mais on envisage le risque que cette fréquence soit > 5 %.

L'entreprise installe 304 ballons et constate que 18 ont un défaut.

Peut-on affirmer, au seuil de risque de 1 % que p, la fréquence de défaut, est toujours de 5 % ?