

# Séries

# I. Suites

Une suite est une fonction dont l'antécédent est un entier :

$$u_n = u(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Parfois on connaît l'expression. On dit que  $u$  est définie **explicitement**.

Exemple :

$$u_n = 4 \times (0,7)^n$$

Parfois, on sait calculer  $u_n$  par rapport aux termes d'avant. On dit que  $u$  est définie **par récurrence**.

$$u_0 = 8, \text{ et } u_{n+1} = 0,5 u_n + 8$$

Ce deuxième cas est plus compliqué mais plus intéressant.

# Exercice 1

Soit la suite  $u$  définie par la récurrence :  $u_{n+1} = 0,8 u_n + 13$  et  $u_0 = 20$ .

- Faites le tableau de valeur de  $u_n$  pour  $0 \leq n \leq 10$ .
- Conjecturez le sens de variation de  $u$ .
- Conjecturez la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- Montrez que  $w_n = 65 - u_n$  est une suite géométrique de premier terme  $w_0 = 45$  et de raison  $q = 0,8$ .
- Déduisez-en l'expression de  $u_n$ .
- Résoudre  $u_n \geq 64,99$ .

## II. Série

Pour définir une somme, on peut l'écrire explicitement. Par exemple la somme des  $N$  premiers carrés d'entiers :

$$S_N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + N^2$$

Cette notation intuitive n'est pas assez performante. On préfère :

$$S_N = \sum_{n=0}^N n^2$$

Peu importe qu'il existe ou non une formule pour trouver le résultat, cette somme est toujours définie, quelque soit  $N$  entier positif.

Par exemple,  $S_{1\,000} = 333\,833\,500$ .

Une série est une somme infinie. Par exemple :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Mais une telle somme a-t-elle vraiment un sens ? Quand on manipule l'infini, on peut avoir des surprises.

## Exercice 2 : résultats absurdes

Pour illustrer les dangers de manipuler l'infini, nous allons supposer qu'une certaine somme infinie est bien définie et nous allons voir où cela nous mène.

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

Nous allons faire l'hypothèse que  $A$  est bien défini et est un nombre réel :  $A \in \mathbb{R}$ .

- Intuitivement, quelle valeur attribueriez-vous à  $A$  ?
- En écrivant  $1 - A$ , montrez que  $1 - A = A$ . Déduisez-en la valeur de  $A$ .
- Soit  $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ .  
Montrez que  $1 - A - B = B$ . Déduisez-en la valeur de  $B$ .
- Soit  $C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$ .  
Montrez que  $C - B = 4C$ . Déduisez-en la valeur de  $C$ .

Nous venons donc de prouver que  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \dots$ .



Ce résultat est absurde et montre que l'on peut obtenir des résultats bizarres si on ne prend pas de précautions.

## Définition

Soit une somme  $S_N = \sum_{n=0}^N (\dots)$ .

La série  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (\dots)$  est, **par définition** :

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

Et  $S$  n'existe que si la limite existe et est réelle, c'est à dire si  $S_N$  **converge**.

## Exemple

Si  $S_N = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + N = \sum_{n=0}^N n$ , on peut prouver que

$$S_N = \frac{N \cdot (N + 1)}{2}. \text{ Donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty.$$

On en conclut donc que  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} n$  n'est pas définie.

### III. Exemples



$0^0$  est indéfini. Tout dépend de la façon dont on s'approche de cette valeur interdite.

Pour nous,  $0^0$  apparaît dans le cas d'une fonction  $f(x) = x^0$ .  
Donc  $f(x) = 1$  sauf pour  $x = 0$  car  $f(0)$  n'est pas défini...

Dans ce cas, il est naturel de choisir  $0^0 = 1$ . C'est ce que nous ferons.

## Exercice 3 : Cas des séries géométriques

On considère un certain réel  $q$ .

$$\text{Soit } S_N = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N = \sum_{n=0}^N q^n.$$

Cette somme finie est bien définie pour tout  $N$ . On cherche à savoir à quelle condition  $S_N$  converge.

- Dans le cas particulier où  $q = 1$ , exprimez  $S_N$  et indiquez si  $S_N$  converge.
- Dans le cas général, exprimez  $q \cdot S_N$ .
- Exprimez  $S_N - q \cdot S_N$ .
- Supposant que  $q \neq 1$ , déduisez l'expression de  $S_N$ .
- À quelle condition sur  $q$  peut-on dire que  $S_N$  converge. Dans ce cas, donnez  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ .

- On considère la série  $S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ . À quelle condition sur  $q$  cette série est-elle définie ? Donnez l'expression de  $S$ . *À connaître.*

## Exercice 4 : Série de Riemann

$$\text{Soit } S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Le problème est beaucoup plus difficile que le précédent. On pourrait le faire théoriquement mais ce serait inutilement abstrait. On se contente donc d'observer l'évolution de  $S_N$ .

1. Calculer  $S_N$  pour des valeurs de plus en plus grandes de  $N$ .
2. À votre avis,  $S_N$  diverge-t-elle ou converge-t-elle ?



Pour que  $S_N$  converge, il faut trouver une valeur  $S \in \mathbb{R}$  dont  $S_N$  se rapproche de plus en plus et ne s'écarte pas.

## Correction

Bien que  $S_N$  croît de moins en moins vite et même que  $S_N$  croît très très lentement à partir d'un certain moment, on peut prouver que

$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$ . Donc  $S_N$  diverge et la série  $S$  correspondante n'existe pas.

## Exercice 5 : Série de Riemann bis

$$\text{Soit } S_N = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Là encore, on se demande si la somme converge. On pourrait le prouver mais ce serait inutilement théorique. On se contente d'une approche intuitive.

1. Calculer  $S_N$  pour des valeurs de plus en plus grandes de  $N$ .
2. Vérifiez que  $S_N \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$ .
3. Concluez sur la valeur de la série  $S$

Nous ne chercherons pas à prouver ce résultat. C'est beaucoup trop difficile.

Considérons la série

$$S = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$$

Cette série est définie pour  $k > 1$ .

On connaît la valeur exacte de  $S$  dans certains cas. Par exemple, pour  $k = 2$ , on sait que  $S = \frac{\pi^2}{6}$ . Il peut d'ailleurs paraître étonnant que  $\pi$  apparaisse dans une formule qui semble n'avoir rien à voir avec le cercle.

## IV. Série de fonctions

On a dit que pour  $-1 < q < 1$  :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

On peut donc considérer les fonctions définies sur  $] -1; 1[$  :

$$f_n(x) = x^n \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Quand on écrit  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ , on dit qu'on **développe**  $F$  en série.

## Exercice 6 : Séries entières

On propose plusieurs suites de fonctions et les séries correspondantes.  
À chaque fois, essayez de deviner l'expression de la fonction correspondant à la série.

a)  $a_n(x) = \frac{x^n}{n!}$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)$$

b)  $b_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x)$$

c)  $c_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  sur  $] -1; 1[$ .

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x)$$



Vous ne pouvez pas, avec une machine, calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty}$ .

Vous pouvez seulement calculer  $\sum_{n=0}^N$  avec  $N$  assez grand.

Dans l'exercice précédent, on a vu, par exemple, que :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Mais nous avons dit aussi que faire la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  n'est pas possible. On

doit se contenter d'une **approximation** en calculant  $\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$ .

Plus  $N$  grand, meilleure est l'approximation mais plus long est le calcul. Il faut donc choisir  $N$  juste assez grand pour assurer le niveau de précision désirée.

## Exercice 7 : Approximation de fonction

Prenons  $\exp(x)$  pour  $x \in ]-1; 1[$ .

On considère  $S_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$ .

Si  $N$  bien choisi, on a dit que  $S_N(x) \approx \exp(x)$ .

Donnez le plus petit  $N$  tel que l'écart entre  $\exp(x)$  et  $S_N(x)$  ne dépasse jamais 0,001 sur l'intervalle  $]-1; 1[$ .

*Vous pouvez tracer sur une calculatrice la courbe de  $|\exp(x) - S_N(x)|$  et chercher les valeurs extrêmes. Faites-le en augmentant  $N$  jusqu'à ce que l'écart ne dépasse jamais 0,001.*

## Exercice 8

On a dit que pour  $-1 < q < 1$ ,  $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ .

Soit  $f(x) = \frac{3}{2-x}$ , pour  $x \in ]-2; 2[$ .

1. À quel intervalle appartient  $\frac{x}{2}$  ?
2. On peut dire que  $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$ . Donnez un développement en série de  $f(x)$ .

## Exercice 9

Soit  $g(x) = \frac{1}{1-x}$  définie sur  $] -1; 1[$ .

Je rappelle que  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ . Soit  $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

1. Montrez que  $f(x) = x \cdot g'(x)$ .
2. Utilisez cette formule et le développement de  $g(x)$  en série pour trouver le développement de  $f(x)$  en série.