

Séries

Suites

Une suite est une fonction définie sur \mathbb{N} .

$$u_n = u(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

- La suite est définie explicitement si on connaît l'expression de $u(n)$. Par exemple $u(n) = 4 \cdot (0,7)^n$.
- La suite est définie par récurrence si chaque $u(n)$ est défini par rapport à ceux qui le précèdent. Par exemple $u(n+1) = 0,5 \cdot u(n) + 8$ et $u(0) = 8$.

Somme

On peut sommer N termes d'une suite. Par exemple :

$$S_N = 1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \sum_{n=1}^N n^2$$

Pour N donné, à moins d'un calcul impossible (par exemple $\frac{1}{0}$), une telle somme est toujours définie.

Série

Une série est une **somme infinie**. Par exemple :

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Mais une telle somme **peut ne pas être définie**. Il faut s'assurer que la **somme converge**.

On définit donc :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dots = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \dots$$

Si la limite existe et est réelle, alors la somme converge et S est bien définie.

Série géométrique

Pour $x \in]-1; 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

On peut dériver, par ex. :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^{n-1}$$

Séries entières

On peut faire le même travail pour quelques fonctions. Quelques exemples :

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
- Pour $x \in]-1; 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
- Pour $x \in]-1; 1[$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$