Exercice 1

Soit la suite u définie par la récurrence : $u_{n+1} = 0,8\,u_n + 13$ et $u_0 = 20$.

a) Faites le tableau de valeur de u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

b) Conjecturez le sens de variation de u.

c) Conjecturez la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

d) Montrez que $w_n = 65 - u_n$ est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 45$ et de raison $q = 0,8$.

e) Déduisez-en l'expression de u_n.

f) Résoudre $u_n \geqslant 64,99$.

Exercice 2 : résultats absurdes

Pour illustrer les dangers de manipuler l'infini, nous allons supposer qu'une certaine somme infinie est bien définie et nous allons voir où cela nous mène.

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

Nous allons faire l'hypothèse que A est bien défini et est un nombre réel : $A \in \mathbb{R}$.

a) Intuitivement, quelle valeur attribueriez-vous à A ?

b) En écrivant $1 - A$, montrez que $1 - A = A$. Déduisez-en la valeur de A.

c) Soit $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$.
Montrez que $1 - A - B = B$. Déduisez-en la valeur de B.

d) Soit $C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$.
Montrez que $C - B = 4C$. Déduisez-en la valeur de C.

Nous venons donc de prouver que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \cdots$.

Exercice 3 : cas des séries géométriques

On considère un certain réel q.

Soit $S_N = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N = \sum\limits_{n=0}^{N} q^n$.

Cette somme finie est bien définie pour tout N. On cherche à savoir à quelle condition S_N converge.

a) Dans le cas particulier où $q = 1$, exprimez S_N et indiquez si S_N converge.

b) Dans le cas général, exprimez $q \cdot S_N$.

c) Exprimez $S_N - q \cdot S_N$.

d) Supposant que $q \neq 1$, déduisez l'expression de S_N.

e) À quelle condition sur q peut-on dire que S_N converge. Dans ce cas, donnez $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$.

f) On considère la série $S = \sum\limits_{n=0}^{N} q^n$. À quelle condition sur q cette série est-elle définie ? Donnez l'expression de S. *À connaître.*

Exercice 4 : séries de Riemann

Soit $S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
Le problème est beaucoup plus difficile que le précédent. On pourrait le faire théoriquement mais ce serait inutilement abstrait. On se contente donc d'observer l'évolution de S_N.

1. Calculer S_N pour des valeurs de plus en plus grandes de N.
2. À votre avis, S_N diverge-t-elle ou converge-t-elle ?

Exercice 5 : Série de Riemann bis

Soit $S_N = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.
Le problème est beaucoup plus difficile que le précédent. On pourrait le faire théoriquement mais ce serait inutilement abstrait. On se contente donc d'observer l'évolution de S_N.

1. Calculer S_N pour des valeurs de plus en plus grandes de N.
2. Vérifiez que $S_N \to \frac{\pi^2}{6}$.
3. Concluez sur la valeur de la série S

Nous ne chercherons pas à prouver ce résultat. C'est beaucoup trop difficile.

Exercice 6 : séries entières

On propose plusieurs suites de fonctions et les séries correspondantes.
À chaque fois, essayez de deviner l'expression de la fonction correspondant à la série.

a) $a_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$. $\qquad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)$

b) $b_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ sur $\mathbb{R}$. $\qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x)$

c) $c_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1\,;1[$. $\qquad C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x)$

On note $n\,!$ et on dit « factorielle n » ou « n factorielle ». $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
Par exemple $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. On convient que $0! = 1$.

Vous ne pouvez pas, avec une machine, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}$.

Vous pouvez seulement calculer $\sum_{n=0}^{N}$ avec N assez grand.

Exercice 7 : approximation de fonction

Prenons $\exp(x)$ pour $x \in]-1\,;\,1[$.

On considère $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$.

Si N bien choisi, on a dit que $S_N(x) \approx \exp(x)$.

Donnez le plus petit N tel que l'écart entre $\exp(x)$ et $S_N(x)$ ne dépasse jamais $0,001$ sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

Vous pouvez tracer sur une calculette la courbe de $|\exp(x) - S_N(x)|$ et chercher les valeurs extrêmes. Faites-le en augmentant N jusqu'à ce que l'écart ne dépasse jamais $0,001$.

Exercice 8

On a dit que pour $-1 < q < 1$, $\displaystyle\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Soit $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$, pour $x \in]-2\,;\,2[$.

1. À quel intervalle appartient $\dfrac{x}{2}$?
2. On peut dire que $f(x) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$. Donnez un développement en série de $f(x)$.

Exercice 9

Soit $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $]-1\,;\,1[$.

Je rappelle que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Soit $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

1. Montrez que $f(x) = x \cdot g'(x)$.
2. Utilisez cette formule et le développement de $g(x)$ en série pour trouver le développement de $f(x)$ en série.