Loi binomiale

Une probabilité est une sorte de **fréquence** :

a) Toujours entre 0 et 1 (entre 0% et 100%)

b) Je répète une expérience N fois. Un événement E est réalisé n fois. La fréquence est $f = \frac{n}{N}$.

$$\textbf{Probabilité} = f \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

c) La probabilité est théorique. **On ne peut pas la mesurer directement.**

Schéma de Bernoulli

Une expérience aléatoire peut avoir deux résultats :

- L'un des résultats est appelé **Succès**, ou S
- La probabilité du succès est $p(S) = p$
- On répète indépendamment cette expérience n fois
- On s'intéresse au nombre de succès X.
- X prend une valeur aléatoire. C'est une **variable aléatoire**.
  *X est donc un **nombre entier** entre 0 et n.*

Loi binomiale :

Quand X est le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli,

$$X \textbf{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n; p)$$

Autrement dit, on dispose de fonctions sur la calculette permettant de calculer les probabilités de la forme : $p(X = 3)$ ou $p(X \leqslant 5)$.

Calculette

- Calcul de $p(X = k)$:
- Calcul de $p(X \leqslant k)$:

Espérance et écart-type

Quand X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$:

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

- $E(X)$ représente la moyenne des valeurs de X si on répète l'expérience un grand nombre de fois. C'est la valeur de X à laquelle on doit s'attendre.
- σ représente un écart normal avec l'espérance. Si $E(X) = 100$ et $\sigma = 10$, on obtiendra probablement $90 \leqslant X \leqslant 110$. En revanche, il est très improbable d'obtenir X éloigné de plus de 2σ de $E(X)$.

Approximation par la loi normale

Quand $n \geqslant 30$ et $n \cdot p \geqslant 5$ et $n \cdot (1-p) \geqslant 5$, autrement dit $E(X)$ pas trop près des bords $X = 0$ ou $X = n$, on peut approximer la loi binomiale par une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec :

$$\mu = E(X) = n \cdot p \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Intervalle de fluctuation

C'est l'intervalle contenant 95% des valeurs les plus probables de $F = \dfrac{X}{n}$ (fréquence de succès)

On utilise l'approximation $\mathcal{B}$ par $\mathcal{N}$ pour obtenir l'**intervalle de fluctuation asymptotique** :

$$I_F \simeq \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \quad ; \quad p + 1,96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right]$$