On s'intéresse à la diffusion d'un médicament dans le corps d'un patient. Dans tout le problème, $t$ est le temps exprimé en heures et $C(t)$ est la quantité de médicament passé dans le sang du patient, en $mg$. À l'instant initial, il n'y a pas du tout de médicament dans le sang du patient.

Pour que le médicament soit efficace, on sait qu'il faut qu'il y en ait $0,5\,mg$ dans le sang du patient. En revanche, le patient est en danger si la masse de médicament dans son sang dépasse $1,7\,mg$.

On donne une pilule contenant $Q = 2\,mg$ du produit.

On peut estimer qu'au bout de 10 heures, tout le médicament a été absorbé et éliminé par l'organisme.

Deux phénomènes ont lieu en même temps :

- la pilule est digérée et le médicament est diffusé dans le sang (absorption) ;
- l'organisme du patient métabolise le médicament et il est détruit progressivement (élimination).

On aura dans le problème une constante $k_a$ qui représente la vitesse d'assimilation et une constante $k_e$ représentant la vitesse d'élimination.

$$k_a = 2 \quad \text{et} \quad k_e = 0,625$$

On ne précise pas l'unité, c'est une des question.

## 1 Premier modèle

On fait d'abord l'hypothèse que l'absorption est proportionnelle à la quantité de médicament restant à dissoudre dans l'estomac. L'équation différentielle dans ce cas est alors :

$$(E) : \quad C' + k_e \cdot C = A \cdot \mathrm{e}^{-k_a \cdot t}$$

1) Donnez l'unité de $k_e$, $k_a$ et $A$.
2) Comme $A \cdot \mathrm{e}^{-k_a \cdot t}$ représente le débit de médicament entrant dans le sang, on peut donc dire :

$$\int_0^{10} A \cdot \mathrm{e}^{-k_a \cdot t} \mathrm{d}t = Q$$

   a) Calculez l'intégrale en fonction de $A$.
   b) Déduisez-en la valeur de $A$.

3) On va maintenant résoudre l'équation différentielle.
   (a) Résoudre l'équation différentielle sans second membre :

$$(E_0) = \quad C' + k_e \cdot C = 0$$

   Vous noterez $C_0$ la solution générale de $(E_0)$.
   (b) Trouver une solution de $(E)$ de forme $C^{ste} \cdot \mathrm{e}^{-k_a \cdot t}$.
   Vous pouvez arrondir la constante à $0,1$ près. Noter $C_1$ cette solution.
   (c) En déduire la solution générale de $(E)$.
   (d) Donner l'unique solution satisfaisant le problème donné.

## 2 Exploitation du résultat

Dans un exercice de ce genre, une fois que l'on a obtenu le résultat de l'équation différentielle, on peut l'exploiter en faisant une étude de la fonction.

Ci-dessous, je vous propose quelques questions typiques du genre que l'on pourrait vous poser dans une évaluation comme le CCF. On ne poserait pas forcément toutes ces questions, je donne ici juste un panel du genre de questions possibles.

On admettra que

$$C(t) = 2,9\left(\mathrm{e}^{-0,625t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)$$

1) a) Donner la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$
   b) Donner une interprétation **concrète** de cette limite (c'est à dire en rapport avec le problème concret du médicament)

c) Donner une interprétation **graphique** de cette limite (c'est à dire en relation avec la courbe de $C(t)$ que l'on pourrait tracer).

2) Montrer que $C'(t) \approx -1,8\mathrm{e}^{-0,625t} + 5,8\mathrm{e}^{-2t}$

3) Résoudre $C'(t) = 0$

Pour cela, vous pouvez par exemple commencer par tout multiplier par $\mathrm{e}^{0,625t}$ ce qui simplifiera grandement l'équation.

4) Faire le tableau de signe de $C'$ joint au tableau de variations de $C$.

5) $C$ admet un maximum. Donner ce maximum arrondit à $0,1$ près.

6) Tracer la courbe pour répondre :

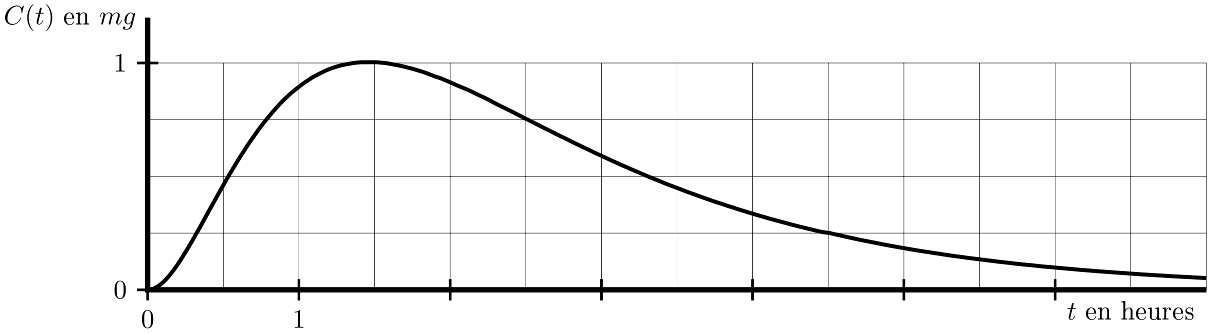
a) Le patient est-il en danger ?

b) Combien de temps le médicament sera-t-il efficace ?

## 3 Second modèle

Tout le travail précédent reposait sur l'hypothèse que l'absorption était proportionnelle à la quantité de médicament restant dans l'estomac du patient. Cela amenait à un modèle en $A \cdot \mathrm{e}^{-k_a t}$ pour le membre de droite.

On se rend compte que la courbe obtenue n'est pas celle que l'on observe. En faisant l'expérience, on obtient la courbe ci-dessous :




On remarque sur cette courbe que l'absorption du médicament commence faiblement. Il semble que l'absorption ait une sorte de retard. Pour tenir compte de cette observation, nous proposons un autre modèle :

$$(E): \quad C' + k_e \cdot C = B \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-k_a \cdot t}$$

Le fait d'ajouter $t$ à droite permet de modéliser une situation où l'organisme n'est pas tout de suite efficace pour assimiler le médicament. On prendra $B = 8$.

1) Quelle est l'unité de $B$ ?

2) Trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec la forme :

$$C_1(t) = (a \cdot t + b)\mathrm{e}^{-k_a \cdot t}$$

Pour cela, calculer $C_1'(t)$ ; remplacer dans l'équation $C_1$ et $C_1'$ ; simplifier les $\mathrm{e}^{-2t}$. Il vous reste une équation avec des termes en $t$ et des termes sans $t$. Cette égalité doit être vraie pour tout $t$. Dans ce cas là, il doit y avoir égalité des coefficients en $t$ et égalité des coefficients sans $t$.

3) Donner la solution de l'équation satisfaisant le cas proposé ici.

4) Tracer la courbe et répondre :

a) Le patient est-il en danger ?

b) Combien de temps le médicament sera-t-il efficace ?