Exo 1

Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre 79,8 mm et 80,2 mm.

(1) On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe sa longueur en mm.

On admet que la variable L suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type 0,0948.

On prélève une pièce au hasard dans la production.

Déterminer la probabilité que cette pièce soit conforme.

(2) L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela on projette de changer le processus de fabrication des pièces.

On définit alors une nouvelle variable L_1 qui à chaque pièce à construire selon le nouveau processus associera sa longueur en mm.

La variable aléatoire L_1 suit une loi normale de moyenne $m = 80$ et d'écart type σ'.

Déterminer σ' pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à $0,99$.

Exo 2

Des appareils sont conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type $6,2$.

(a) Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.

(b) Déterminer le réel a tel que $P(X > a) = 0,01$.

Exo 3

Dans cette partie. on s'intéresse à la durée séparant deux requêtes successives reçues par un serveur web.

On appelle T la variable aléatoire qui prend pour valeurs les durées (exprimées en secondes) séparant l'arrivée de deux requêtes successives sur le serveur.

On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 500$.

(1) On désigne par t un nombre réel positif.

  (a) Calculer $P(T \leqslant t)$ en fonction de t.

  (b) En déduire la valeur de t pour laquelle $P(T \leqslant t) = 0,95$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième de seconde.

(2) Donner $E(T)$. Que représente cette valeur ?

Exo 4 Une entreprise fabrique des pièces en grande série.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse d'une pièce en grammes. On admet que X suit une loi normale de moyenne 7,5 et d'écart type σ.

(1) Après une période de production, la machine de fabrication a subi un dérèglement brutal. L'écart type σ vaut alors $0,015$.

On rappelle qu'une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.

Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

(2) Calculer la valeur de σ pour laquelle la probabilité qu'une pièce soit conforme est égale à $0,99$.

(3) Dans cette question, on suppose qu'à la suite d'un nouveau dérèglement, la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $7,502$ et d'écart type $0,002$.

Calculer la probabilité qu'une pièce, choisie au hasard, soit conforme.

Exo 5

La transmission des chiffres binaires est assurée par un signal électrique carré. Les impulsions supérieures à 2 volts représentent le chiffre 1, les autres le chiffre 0. Ne pouvant affiner davantage leurs réglages, les techniciens admettent que les erreurs de transmission restantes sont dues à un « bruit aléatoire ». Celui-ci est modélisé par un signal de tension aléatoire U, exprimée en volts. On admet que U suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type σ.

(1) Pour envoyer les chiffres 1, on envoie des impulsions de 4 volts. Ces dernières sont modifiées par le bruit aléatoire. La tension reçue est ainsi égale à $4 + U$.

Dans cette question, on suppose que $\boldsymbol{\sigma = 0,7}$.

(a) Justifier que la probabilité que cette tension représente le chiffre 1 est égale à la probabilité que U soit supérieure à -2.

(b) Calculer cette probabilité à $0,001$ près.

(2) Quelle condition doit-on imposer à l'écart type σ pour que la proportion d'erreurs de transmission d'un chiffre 1 soit inférieure à 0,1 % ?

Exo 6 Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle.

Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

Une pièce fabriquée est conforme si son épaisseur est comprise en $14,3$ et $15,5$ mm.

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur en millimètres. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ. La moyenne m dépend du réglage de la machine.

(1) Dans cette question, on suppose que $\sigma = 0,35$. De plus, la machine a été réglée de sorte que $m = 15$.

(a) Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée soit conforme.

(b) Calculer le nombre réel positif h tel que $p(15 - h \leq X \leq 15 + h) = 0,95$.

(c) Interpréter le résultat précédent à l'aide d'une phrase.

(2) La machine est désormais réglée de sorte que $m = 14,9$.

Quel devrait être alors l'écart type pour que le pourcentage de pièces conformes soit égal à 90 % ?

Exo 7

On étudie la durée de vie d'un composant.

La durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire T, exprimée en heures. On admettra que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,4$

(1) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que le composant ait une durée de vie strictement inférieure à 1 000 heures.

Exo 8

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

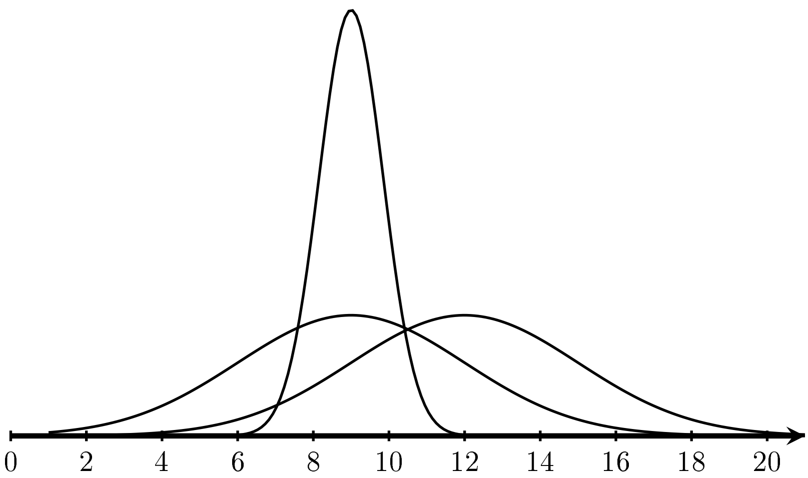
Dix panneaux solaires sont installés sur le toit d'une maison située dans une région à ensoleillement régulier et produisent de l'électricité.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe la production électrique fournie par ces 10 panneaux, exprimée en kWh.

La variable Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 9$ et $\sigma = 3$.

(1) Quelle est la probabilité que la production journalière soit comprise entre 6 et 12 kWh ?

(2) Parmi les trois fonctions de densités de probabilité représentées ci-dessous, laquelle peut être celle de la loi de Y ? Justifier.



(3) Les occupants de la maison consomment en moyenne 10 kWh par jour (hors chauffage et eau chaude).

   (a) Quelle est la probabilité que la production journalière des panneaux soit supérieure à la consommation moyenne quotidienne ?

   (b) Quelle devrait être la consommation moyenne quotidienne de cette famille, en kWh, pour que cette probabilité soit environ de 90 % ? On arrondira la réponse au dixième.

Exo 9 Une machine produit des composants électroniques.

Un composant est accepté s'il admet une résistance électrique comprise entre 195 et 205 Ω.

On admet que la variable aléatoire R qui, à 1 composant prélevé au hasard dans la production, associe la valeur exprimée en ohm de sa résistance, suit une loi normale de paramètres $\mu = 200$ et σ.

On prélève au hasard un composant dans la production.

(1) On suppose, dans cette question uniquement, que $\sigma = 3,5$.
Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit accepté ?
Arrondir à 0, 01 près.

(2) Avec un meilleur réglage de la machine qui ne modifie pas μ, mais qui agit sur σ, on souhaite pouvoir accepter 95 % des composants produits.

   (a) Quel est la probabilité que : $R \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$? Arrondir à 0, 01 près.

   (b) On rappelle qu'un composant est accepté s'il admet une résistance électrique comprise entre 195 et 205 Ω.
   Quelle valeur peut-on donner à σ, en réglant la machine, pour que 95 % des composants produits soient acceptés ?