

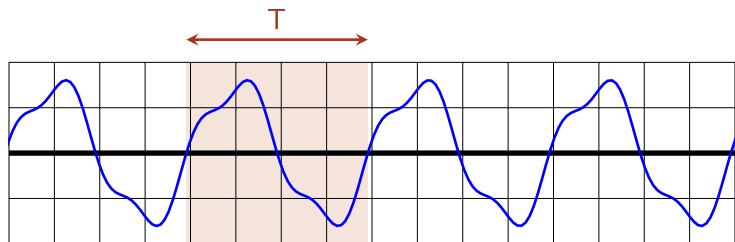
Décomposition en série de Fourier

- Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).
- Mathématicien et physicien.
- Professeur à l'âge de 16 ans.
- Manque de peu de passer à la guillotine pendant la Terreur.
- Participe à la campagne d'Égypte de Napoléon.
- Fait partie des 72 savants dont le nom est écrit sur la Tour Eiffel.



I. Fonctions périodiques

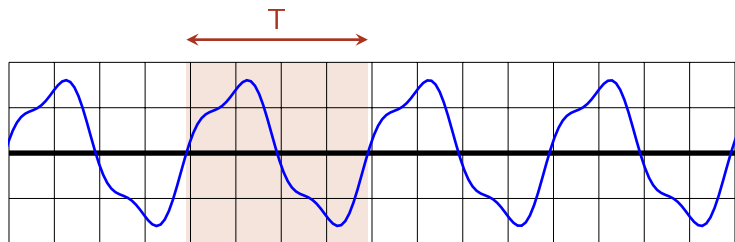
I. 1) Période et pulsation



- Un signal périodique a un motif de longueur T qui se répète.
 T est souvent un temps, en secondes.

$$s(t + T) = s(t)$$

I. 1) Période et pulsation

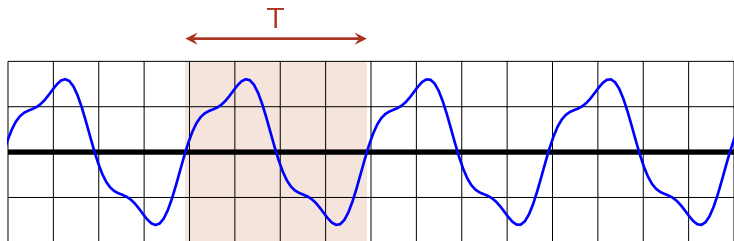


- Un signal périodique a un motif de longueur T qui se répète.
 T est souvent un temps, en secondes.

$$s(t + T) = s(t)$$

- fréquence $f = \frac{1}{T}$. La fréquence est en $s^{-1} = Hz$.
Fréquence : nombre de répétition du motif par unité de temps.

I. 1) Période et pulsation

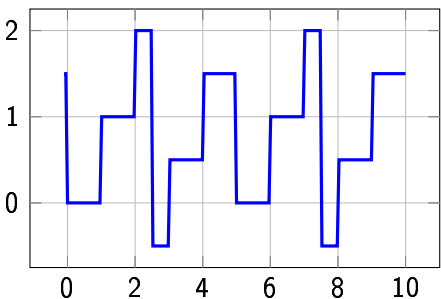
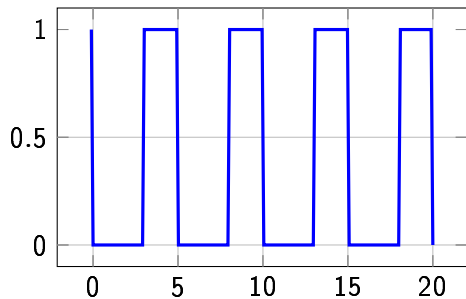
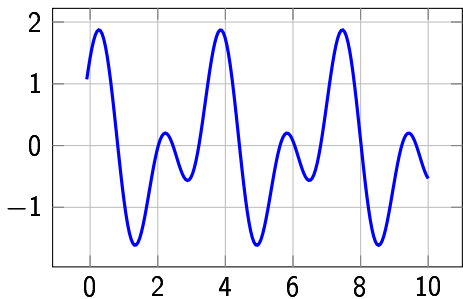
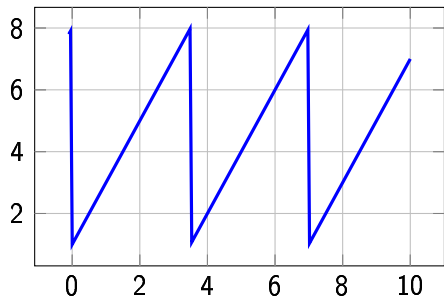


- Un signal périodique a un motif de longueur T qui se répète.
 T est souvent un temps, en secondes.

$$s(t + T) = s(t)$$

- fréquence $f = \frac{1}{T}$. La fréquence est en $s^{-1} = Hz$.
Fréquence : nombre de répétition du motif par unité de temps.
- Pulsation ω définie par $\omega \cdot T = 2\pi$. ω est en $rad \cdot s^{-1}$.

Exercice 1 : donnez T et ω

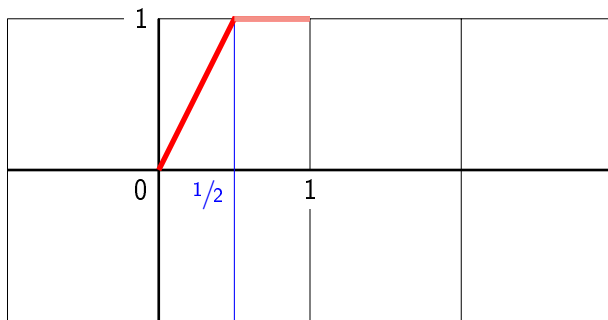


I. 2) Fonction définie par morceaux

Les fonctions que l'on va utiliser seront souvent définies par morceaux.

Exemple : Soit s un signal **impair** de **période** $T = 2$ et

$$s(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

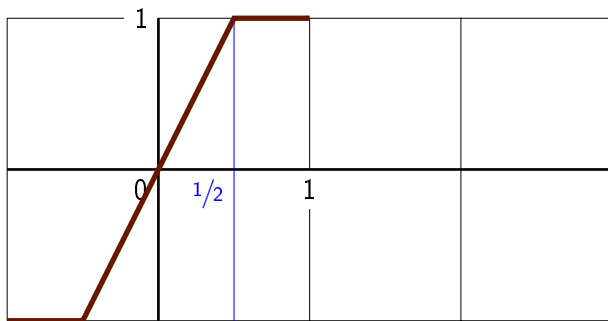


I. 2) Fonction définie par morceaux

Les fonctions que l'on va utiliser seront souvent définies par morceaux.

Exemple : Soit s un signal **impair** de **période** $T = 2$ et

$$s(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

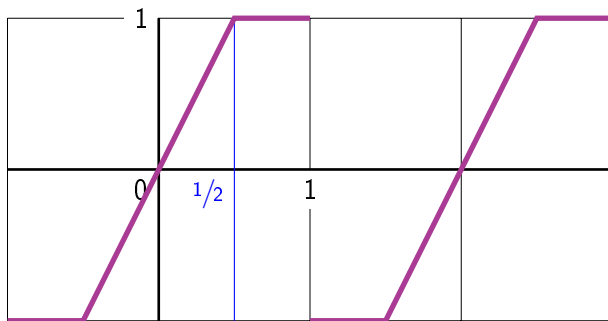


I. 2) Fonction définie par morceaux

Les fonctions que l'on va utiliser seront souvent définies par morceaux.

Exemple : Soit s un signal **impair** de **période** $T = 2$ et

$$s(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$



Exercice 2

Dans les cas suivant, on vous demande de tracer deux périodes du signal s .

(a) s pair et de période 4 et :

$$s(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

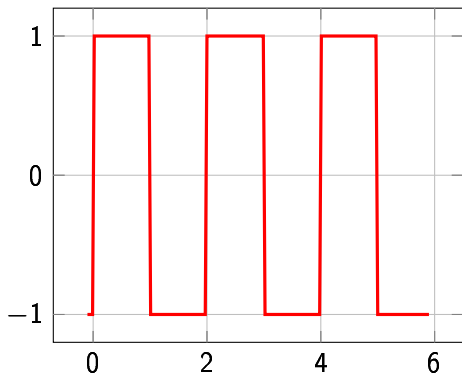
(b) s de période 3 et :

$$s(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 3 - t & \text{si } 1 < t < 3 \end{cases}$$

(c) s de période 2π et sur $[0; 2\pi]$,
 $s(t) = t(2\pi - t)$

II. Décomposition en sinusoïdes

Exemple : un signal rectangulaire



Un signal périodique peut être décomposé en sinusoïdes.

Ici la période est $T = 2$
donc $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$

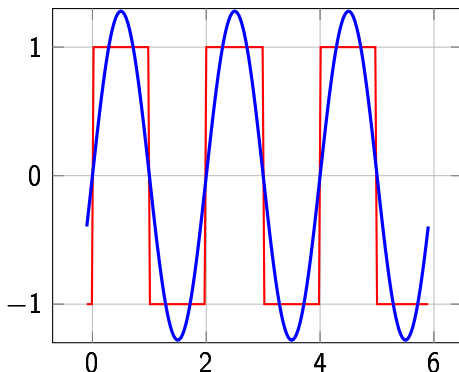
Premier harmonique = fondamental

On souhaite trouver un sinus qui passe au plus près du signal.

On propose

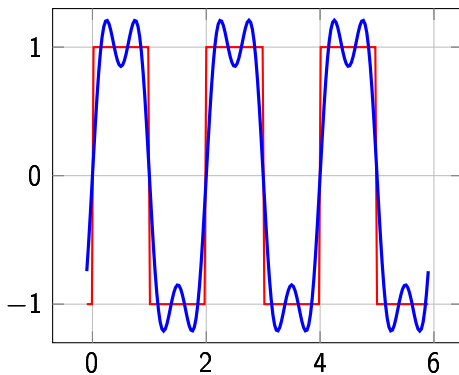
$$S(t) = 1,28 \sin(\pi t)$$

Faites-le en même temps avec votre calculatrice.



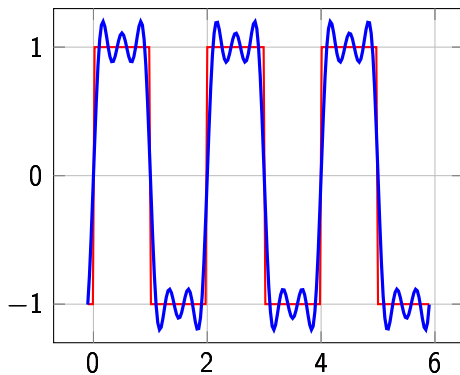
Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.
Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$S(t) = 1,28 \sin(\pi t) + 0,43 \sin(3\pi t)$$



Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.
Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$S(t) = 1,28 \sin(\pi t) \\ + 0,43 \sin(3\pi t) \\ + 0,26 \sin(5\pi t)$$

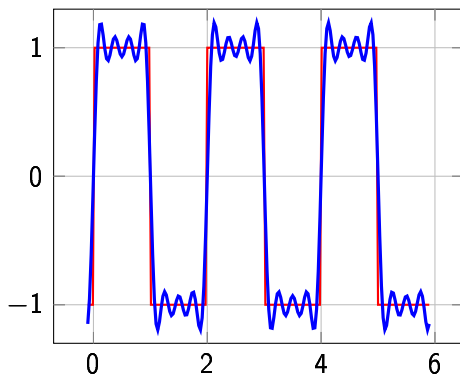


harmoniques...

Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.

Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$\begin{aligned} S(t) = & 1,28 \sin(\pi t) \\ & + 0,43 \sin(3\pi t) \\ & + 0,26 \sin(5\pi t) \\ & + 0,18 \sin(7\pi t) \end{aligned}$$

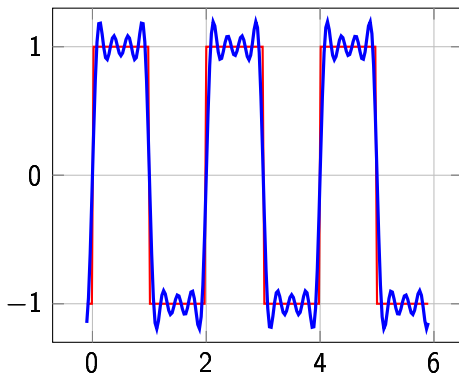


harmoniques...

Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.

Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$\begin{aligned} S(t) = & 1,28 \sin(\pi t) \\ & + 0,43 \sin(3\pi t) \\ & + 0,26 \sin(5\pi t) \\ & + 0,18 \sin(7\pi t) \end{aligned}$$



$$S(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2 \omega t) + \dots = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n \omega t)$$

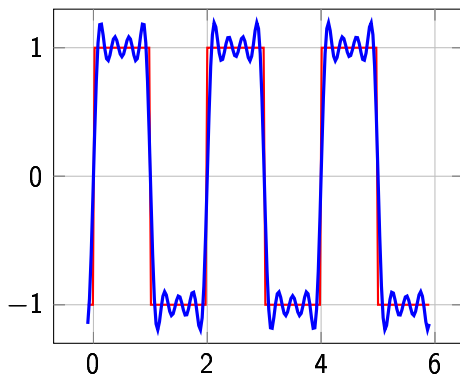
Avec $b_1 =$; $b_2 =$; $b_3 =$; $b_4 =$; $b_5 =$

harmoniques...

Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.

Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$\begin{aligned} S(t) = & 1,28 \sin(\pi t) \\ & + 0,43 \sin(3\pi t) \\ & + 0,26 \sin(5\pi t) \\ & + 0,18 \sin(7\pi t) \end{aligned}$$



$$S(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2 \omega t) + \dots = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n \omega t)$$

Avec $b_1 = 1,28$; $b_2 = 0$; $b_3 = 0,43$; $b_4 = 0$; $b_5 = 0,26$

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.
- Certains b_n sont nuls et on ne voit pas de cos. C'est un cas particulier.

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.
- Certains b_n sont nuls et on ne voit pas de cos. C'est un cas particulier.
- Les $b_n \searrow$. On devine que quand $n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow 0$.

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.
- Certains b_n sont nuls et on ne voit pas de cos. C'est un cas particulier.
- Les $b_n \searrow$. On devine que quand $n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow 0$.
- On devine que si on somme à l' ∞ on arrivera infiniment proche du signal. Mais si on se contente d'une approximation, pas besoin d'aller jusqu'à l' ∞ .

Exercice 3

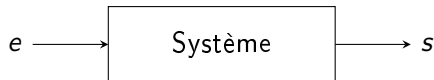
Faites la même chose pour les deux cas suivants :

$$\begin{aligned} S(t) = & 0,637 \sin(\pi t) \\ & - 0,318 \sin(2\pi t) \\ & + 0,212 \sin(3\pi t) \\ & - 0,159 \sin(4\pi t) \\ & + 0,127 \sin(5\pi t) \\ & - 0,106 \sin(6\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(t) = & 0,25 - 0,405 \cos(\pi t) \\ & + 0,203 \cos(2\pi t) \\ & - 0,045 \cos(3\pi t) \\ & - 0,016 \cos(5\pi t) \\ & + 0,023 \cos(6\pi t) \\ & - 0,008 \cos(7\pi t) \\ & - 0,005 \cos(9\pi t) \\ & - 0,008 \cos(10\pi t) \end{aligned}$$

II. 1) Quel intérêt

L'étude d'un phénomène physique, ou bien l'étude d'un circuit électronique, se ramène souvent à un système avec un signal en entrée et un signal en sortie.



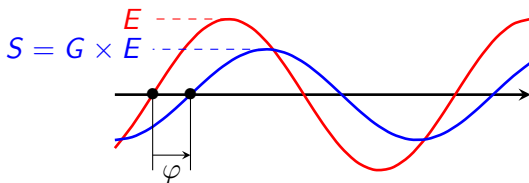
Quand le système est commandé par une équation différentielle **linéaire**, alors le système est linéaire.

Exemple : $e = \tau \cdot s' + s$

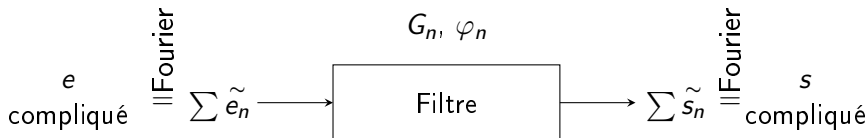
Pour un e quelconque, il est difficile de prévoir s .

Mais, si e est $\sim c$ est beaucoup plus simple !

e est $\sim \Rightarrow s$ aussi avec même ω . Il faut seulement tenir compte d'un **gain** G et d'un **déphasage** φ .



On raisonne alors ainsi :



Pour chaque harmonique, le calcul $e_n \mapsto s_n$ est simple, il suffit de connaître le gain G_n et le déphasage φ_n .

Non seulement, le calcul est ainsi plus facile à faire, mais en plus il permet de mieux comprendre physiquement la façon dont e se transforme en s .

III. Série de Fourier

III. 1) Définition

f est une fonction de période T .

On appelle **série de Fourier** associée à f la fonction :

$$S_f : t \mapsto a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt = f_{MOY}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Ces formules permettent de calculer les coefficients qui font que S_F est au plus près de f , comme dans les exemples précédents.

$\int_T \cdots dt$ représente une intégrale prise sur une période quelconque.

Les coefficients a_0 , a_n et b_n sont réels de même que $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$. En physique, on trouve avantageux d'utiliser des complexes. On utilise $\exp(in\omega t)$ et des coefficients c_n complexes. On y reviendra plus tard.

Exercice 4 : Primitive

Donnez les primitives de

(a) $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$

(b) $f(t) = \cos(t)$

(c) $f(t) = \sin(t)$

(d) $f(t) = 4 \sin(10t)$

(e) $f(t) = 4 \cos(n\omega t)$

Exercice 5 : Intégrales

$$(a) \int_0^2 t dt$$

$$(b) \int_0^2 (5t^2 + t + 2) dt$$

$$(c) \int_0^\pi \sin(t) dt$$

$$(d) \int_0^\pi 4 \cos(t) dt$$

$$(e) \int_0^\pi 9 \cos(n t) dt$$

Exercice 6

Calculez a_n et b_n dans les cas suivants :

(a) période $T = 2$, f impaire, $f(t) = 1$ pour $0 \leq t < 1$

On peut se demander ce que doit valoir $f(-1)$.

1 ou -1 ou encore 0 ? Pour le calcul des coefficients a_n et b_n , c'est sans importance et de surcroît, ce genre de problème est purement théorique.

(b) période $T = 3$, $f(t) = 1$ pour $0 \leq t < 1$ et 0 sinon.

(c) période $T = 1$, $f(t) = t$ sur $[0; 1[$.

Ce calcul est difficile. Réfléchissez-y une seconde mais ne vous inquiétez pas de ne pas trouver la méthode.

Solution pour Exo 6.3

La technique de calcul est difficile et n'est pas à connaître.
On utilise un logiciel.

The screenshot shows the Xcas software interface with the following content:

- Window title: Xcas Nouvelle Interface
- Menu bar: Fich Edit Cfg Aide Outils Expression Cmds Prg Graphe Geo Ta
- Status bar: Sans_nom, Sauver, Config : exact real RAD 12 xcas 67.738M, STOP, Kbd, X
- Input 1: `1 int(t*cos(n*omega*t), t, 0, T)`
- Output 1: `omega/(n^2*omega^2)*sin(n*omega*t) for definite integration in [0,T]`
- Result 1:
$$-\frac{1}{n^2 * \omega^2} + \frac{\cos(T * n * \omega) + T * n * \omega * \sin(T * n * \omega)}{n^2 * \omega^2}$$
- Input 2: `2 int(t*sin(n*omega*t), t, 0, T)`
- Output 2: `1/(n^2*omega^2)*sin(n*omega*t) for definite integration in [0,T]`
- Result 2:
$$\frac{\sin(T * n * \omega) - T * n * \omega * \cos(T * n * \omega)}{n^2 * \omega^2}$$
- Input 3: `3 [`
- Calculator keypad at the bottom with various mathematical symbols and functions.

III. 2) Convergence

La série S_f est-elle bien définie ? Quelle rapport entre S_f et f ?

La série S_f est-t-elle bien définie ? Quelle rapport entre S_f et f ?

Conditions de Dirichlet : $S_f(t) = f(t)$ à certaines conditions :

- La dérivée f' est continue, sauf éventuellement quelques trous.
- Pas de d'infinis, pas de tangentes verticales...
- Si f a une discontinuité (trou), à cet endroit là, $S_f(t) \rightarrow$ le milieu du trou.

La série S_f est-t-elle bien définie ? Quelle rapport entre S_f et f ?

Conditions de Dirichlet : $S_f(t) = f(t)$ à certaines conditions :

- La dérivée f' est continue, sauf éventuellement quelques trous.
- Pas de d'infinis, pas de tangentes verticales...
- Si f a une discontinuité (trou), à cet endroit là, $S_f(t) \rightarrow$ le milieu du trou.

Ce qu'il faut retenir : La **série infinie** permet de retrouver f . Si on ne somme pas jusqu'à ∞ , on n'aura qu'une **approximation**.

S_f n'est rien d'autre que f écrit sous forme d'une **somme d'harmoniques**.

Exercice 7

Dans tous les cas suivants, dites si $S_f \rightarrow f$.

Précisez s'il y a des t pour lesquels $S_f(t) \neq f(t)$.

$$(a) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}, \text{ de période } T = 2$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}, \text{ paire et période } T = 4$$

$$(c) f(t) = \sqrt{t} \text{ sur } [0; 1[\text{ et de période } T = 1$$

$$(d) f(t) = t \cdot (1 - t) \text{ sur } [0; 1[\text{ et de période } T = 1$$

III. 3) Fonction paire ou impaire

$$S_f(t) = a_0 + \underbrace{\sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega t)}_{\text{pair}} + \underbrace{\sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\omega t)}_{\text{impair}}$$

Si f paire :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = 0$$

Si f impaire :

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$

Exercice 8

Calculez les coefficients a_n et b_n dans les cas suivants :

$$(a) f \text{ impaire, de période } T = 6 \text{ avec } f(t) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0,5 & \text{si } 2 < t < 3 \end{cases},$$

$$(b) f \text{ paire et de période } T = 2 \text{ avec } f(t) = \begin{cases} 1 - 2t & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}.$$

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2t) \cos(n\pi t) dt = \frac{2}{n^2 \pi^2} - \frac{2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \pi^2}$$

III. 4) Puissance

signal $u(t)$ de période T .

$$P = U_{EFF}^2 = \overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_T u(t)^2 dt$$

À rapprocher de la notion de puissance dans circuit électrique : dans une résistance, $P = \frac{U^2}{R}$ et donc $P_{MOY} = \frac{U_{EFF}^2}{R}$.

Exercice 9

Calculer P dans les cas suivants :

(a) $u(t) = 12$

(b) $u(t) = K$

(c) $u(t) = t$ sur $[0; 2]$ et période $T = 2$

(d) $u(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$, paire et période $T = 4$

(e) $u(t) = A \sin(\omega t)$

(f) $u(t) = A \cos(\omega t)$

(g) $u(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

III. 5) Théorème de Parseval

signal $u(t)$ de période T . La décomposition en série de Fourier est :

$$S_u(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)$$

On a déjà dit que $u(t) = S_u(t)$ (sauf éventuellement en quelques t)

On aura de plus :

$$P = \overline{u^2} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n^2 + b_n^2$$

Exercice 10

f paire, de période $T = 2$ et sur $[0; 1]$, $f(t) = 1 - t$.

(a) Justifier que les coefficients b_n sont nuls.

(b) Montrer que $a_0 = \frac{1}{2}$.

(c) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

```
int((1-t)*cos(n*omega*t),t,0,T/2)
```

$$\frac{1}{n^2 * \omega^2} + \frac{-2 * \cos\left(\frac{T * n * \omega}{2}\right) + 2 * n * \omega * \sin\left(\frac{T * n * \omega}{2}\right) - T * n * \omega * \sin\left(\frac{T * n * \omega}{2}\right)}{2 * n^2 * \omega^2}$$

En déduire que $a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n)$

(d) Calculer $P = \overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_T f(t)^2 dt$

(e) Soit $S_N(t) = a_0 + \sum_{1 \leq n \leq N} a_n \cos(n \pi t)$ une série de Fourier incomplète.

Déterminer la valeur de N pour laquelle la puissance de S_N atteint 99,9 % de P ?

Exercice 10

f paire, de période $T = 2$ et sur $[0; 1]$, $f(t) = 1 - t$.

(a) Justifier que les coefficients b_n sont nuls.

(b) Montrer que $a_0 = \frac{1}{2}$.

(c) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

```
int((1-t)*cos(n*omega*t),t,0,T/2)
```

$$\frac{1}{n^2 * \omega^2} + \frac{-2 * \cos\left(\frac{T * n * \omega}{2}\right) + 2 * n * \omega * \sin\left(\frac{T * n * \omega}{2}\right) - T * n * \omega * \sin\left(\frac{T * n * \omega}{2}\right)}{2 * n^2 * \omega^2}$$

En déduire que $a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n)$

(d) Calculer $P = \overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_T f(t)^2 dt$ $P = \frac{1}{3}$

(e) Soit $S_N(t) = a_0 + \sum_{1 \leq n \leq N} a_n \cos(n \pi t)$ une série de Fourier incomplète.

Déterminer la valeur de N pour laquelle la puissance de S_N atteint 99,9 % de P ? $\text{pour } N = 3, P_{S_N} \simeq 99,94 \% P$

III. 6) Spectre

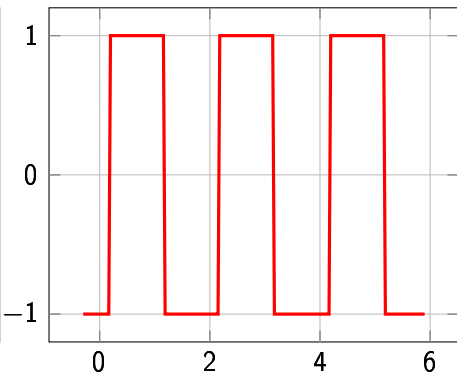
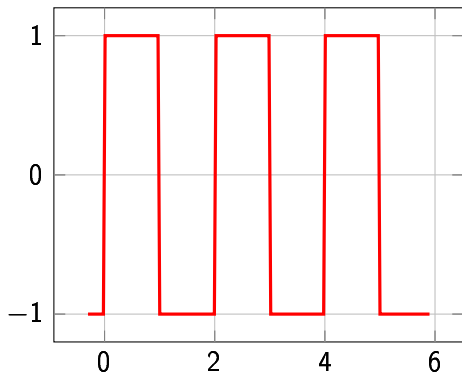
Pourquoi y a-t-il des $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ de même période dans la décomposition ?

Pour comprendre, nous allons décomposer deux signaux presque identiques : le deuxième est légèrement retardé.

III. 6) Spectre

Pourquoi y a-t-il des $\sin(n\omega t)$ et $\cos(n\omega t)$ de même période dans la décomposition ?

Pour comprendre, nous allons décomposer deux signaux presque identiques : le deuxième est légèrement retardé.



À gauche

$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	0	1,27
2	0	0
3	0	0,42
4	0	0
5	0	0,25
6	0	0

À droite

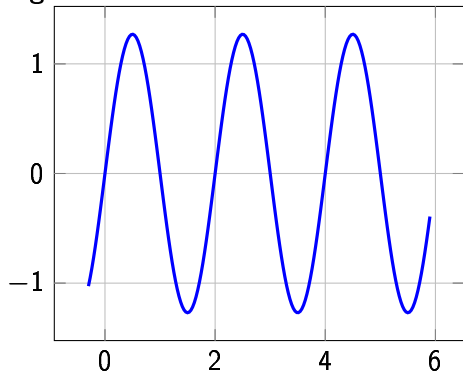
$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	-0,64	1,10
2	0	0
3	-0,42	0
4	0	0
5	0,13	-0,22
6	0	0

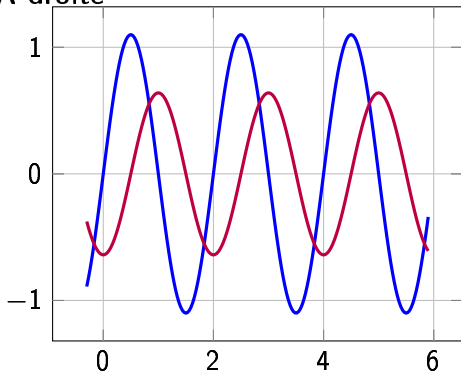
Les deux tableaux semblent très différents, pourtant les deux signaux étaient très proches.

Par exemple, considérons l'harmonique de rang 1.

À gauche



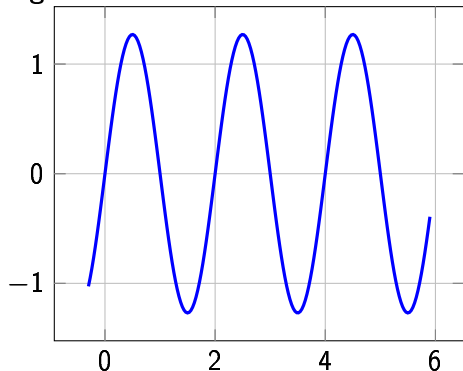
À droite



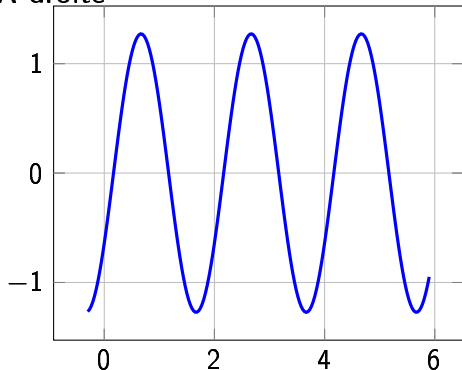
Là encore, on a l'impression que c'est très différent.

Par exemple, considérons l'harmonique de rang 1.

À gauche



À droite



Là encore, on a l'impression que c'est très différent.

Mais si on somme à droite...

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenté par la **phase** φ_n ,

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenté par la **phase** φ_n ,
- les physiciens préfèrent l'écriture de droite qui font apparaître clairement A_n et φ_n ,

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenté par la **phase** φ_n ,
- les physiciens préfèrent l'écriture de droite qui font apparaître clairement A_n et φ_n ,
- la notation a_n et b_n est moins claire, mais on passe de l'une à l'autre avec :

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenté par la **phase** φ_n ,
- les physiciens préfèrent l'écriture de droite qui font apparaître clairement A_n et φ_n ,
- la notation a_n et b_n est moins claire, mais on passe de l'une à l'autre avec :

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

- Les A_n constituent le **spectre**.

Exercice 11

Vérifiez que les signaux ont le même spectre.

À gauche

$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	0	1,27
2	0	0
3	0	0,42
4	0	0
5	0	0,25
6	0	0

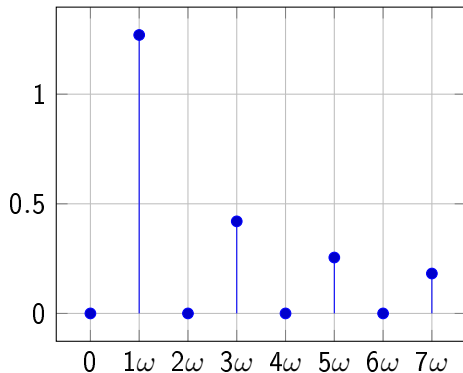
À droite

$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	-0,64	1,10
2	0	0
3	-0,42	0
4	0	0
5	0,13	-0,22
6	0	0

Représentation graphique du spectre

Sur un graphique, on représente des barres de hauteurs A_n pour chaque harmonique.

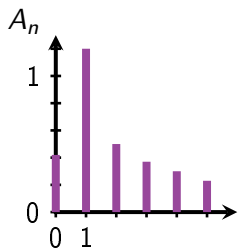


Exercice 12

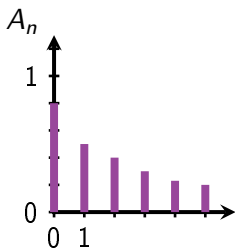
Soit la fonction f de période $T = 2\pi$ développable en série de Fourier et dont le développement est :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right]$$

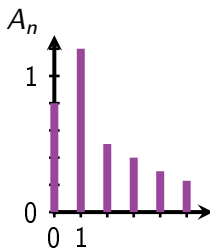
Indiquez le spectre correspondant.



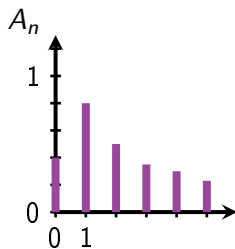
(a)



(b)



(c)



(d)