Séries de Fourier

Décomposition en série de Fourier

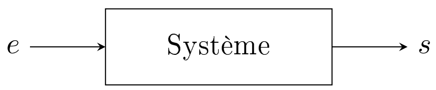
s signal périodique

- s a un période $T \Leftrightarrow s(t+T) = s(t)$.
  Autrement dit, la courbe de s présente un motif de longueur T qui se répète.
- La fréquence est $f = \dfrac{1}{T}$
- La pulsation est ω telle que $T \cdot \omega = 2\pi$.

Il y a diverse façon de noter la moyenne. On peut mettre une barre comme $\overline{f}$. On peut utiliser aussi des chevrons : $\langle f \rangle$. On utilisera ici $\langle f \rangle$. On peut alors noter la moyenne du carré avec $\langle f^2 \rangle$.

Pour quoi faire ?

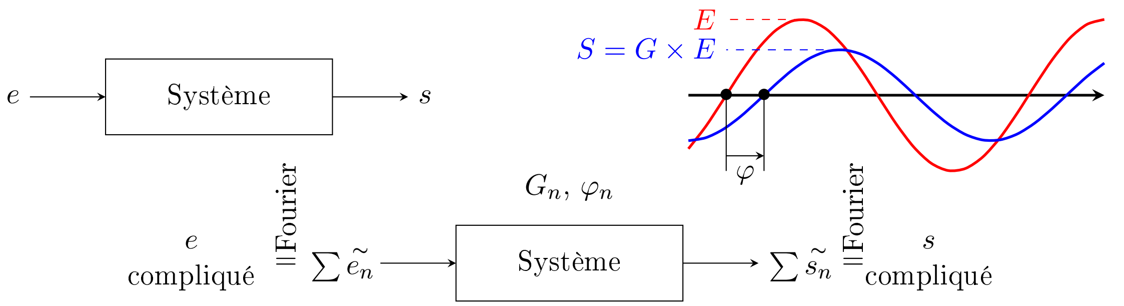
L'étude d'un phénomène physique, ou bien l'étude d'un circuit électronique, se ramène souvent à un système avec un signal en entrée et un signal en sortie.



Quand le système est commandé par une équation différentielle **linéaire**, alors le système est linéaire.

Exemple : $e = \tau \cdot s' + s$

Pour un e quelconque, il est difficile de prévoir s. **Mais, si e est $\sim$ c'est beaucoup plus simple :** e est $\sim \Rightarrow s$ aussi avec même ω. Il faut seulement tenir compte d'un **gain** G et d'un **déphasage** φ.



Pour chaque harmonique, le calcul $e_n \mapsto s_n$ est simple, il suffit de connaître le gain G_n et le déphasage φ_n. Le calcul est ainsi plus facile à faire et la méthode donne un éclairage physique utile.

Calculs des coefficients de la série

Pour f de période T on définit la série :

$$S_f : \quad t \mapsto a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_T f(t) \mathrm{d}t$$

$$\text{pour } n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t) \mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t) \mathrm{d}t$$

Convergence : Critères de Dirichlet

La série S_f converge vers f si

- la dérivée f' est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de discontinuité par période,
- f et f' restent bornés [*ne tendent pas vers* ∞]

Si f a une discontinuité [*un trou*] en t_0, alors $S_f(t_0) = \dfrac{\lim_{t\to t_0^-} f(t) + \lim_{t\to t_0^+} f(t)}{2}$
autrement dit $S_f(t_0) \to$ la milieu du trou.

Fonction paire ou impaire

f **paire :** alors $b_n = 0$ et :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

f **impaire :** alors $a_0 = a_n = 0$ et :

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

Deux morceaux pour une même harmonique

Physiquement, on s'intéresse surtout au spectre, c'est à dire la quantité de signal pour chaque pulsation. Mais pour une même pulsation $n\omega$, il y a dans la décomposition deux morceaux : $a_n\cos(n\omega t)$ et $b_n\sin(n\omega t)$. Pourquoi y a-t-il deux morceaux dans la décomposition pour une même harmonique ?

Cela vient de ce que nous avons voulu éviter une part de trigonométrie. Les deux morceaux forment une seule harmonique :

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = A_n\cos(n\omega t - \varphi_n)$$

L'harmonique de rang n est une onde de pulsation $n\omega$. Elle forme une sinusoïde pas forcément calée sur un sin ou un cos pur. Ce décalage est exprimé par le **déphasage** φ_n.

L'amplitude de l'harmonique est $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Les valeurs de a_n et b_n déterminent A_n et φ_n. Physiquement, a_n et b_n ne signifient rien. Ce sont A_n et φ_n qui ont une signification, et surtout A_n. Les valeurs de A_n forment le **spectre**.

Puissance et valeur efficace

On appelle **puissance** la quantité : $P = \left\langle f^2\right\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(t)^2\mathrm{d}t = U_{EFF}^2$

Notons quelques résultats utiles :

- Pour une constante, $\left\langle A^2\right\rangle = A^2$. La puissance portée par la moyenne a_0 est donc $\left\langle a_0^2\right\rangle = a_0^2$.
- Pour $A\cdot\cos(\omega t)$ on a $P = \left\langle (A\cdot\cos(\omega t))^2\right\rangle = \frac{A^2}{2}$ ce qui explique que $U_{EFF} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ dans ce cas. Même chose pour un sin.
- Du résultat précédent on déduit que $a_n\,\cos(n\,\omega\,t)$ porte une puissance $\frac{a_n^2}{2}$ et $b_n\,\sin(n\,\omega\,t)$ porte une puissance $\frac{b_n^2}{2}$

Cela nous permet de comprendre le **théorème de Parseval** :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} a_n^2 + b_n^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} A_n^2$$

Série partielle

Un signal s a en général une infinité d'harmoniques. $s(t)$ s'écrit donc comme une somme infinie. Mais pour des raisons de calculs, ou pour des raisons physiques, il peut être impossible de mener la somme jusqu'à l'infini. On doit se contenter d'une somme partielle qui ne produira qu'une approximation.

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \cdots \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} \cdots$$

On peut se demander **comment bien choisir** N pour que l'approximation soit de bonne qualité.

Exemple : s est un signal électrique. Je dois faire passer ce signal dans un câble électrique. Mais les hautes fréquences ont du mal à passer dans le câble. Plus je veux passer de hautes fréquences, plus il me faut un câble cher. Je cherche donc une limite raisonnable pour que mon signal reste bon, sans avoir à payer un câble trop cher.

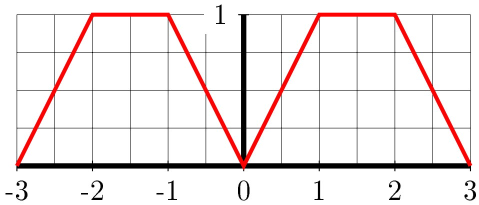
Un critère courant est de chercher N tel que la puissance partielle représente par exemple 99 % de la puissance du signal :

$$P_N = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 = 99\,\%P$$

Exemple

$f(t)$ paire de période $T = 4$, donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$ et

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

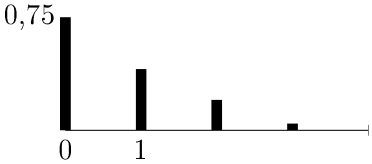


$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{4}\left(\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 1\,\mathrm{d}t\right) = \frac{3}{4} \quad ; \quad b_n = 0 \text{ (car paire)}$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\omega t)\mathrm{d}t &= \frac{4}{4}\left(\int_0^1 t\cdot\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2\,n\,\pi\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4}{n^2\pi^2} + \frac{2\,\sin(n\pi) - 2\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \\ &= 4\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

En effet, $\sin(n\pi) = 0$ *et les termes en* $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ *s'annulent l'un l'autre. Notez qu'on utilise un logiciel de calcul formel pour trouver l'intégrale de gauche.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	$-\frac{4}{\pi^2}$	$-\frac{8}{4\pi^2}$	$-\frac{4}{9\pi^2}$	0	$-\frac{4}{25\pi^2}$	$-\frac{8}{36\pi^2}$	$-\frac{4}{49\pi^2}$	0	$-\frac{4}{81\pi^2}$
$\approx$	$-0,405$	$0,203$	$-0,045$	0	$-0,016$	$-0,023$	$-0,008$	0	$-0,005$



$$P = \langle f^2 \rangle = \frac{2}{3}$$

a_0 à a_3 contiennent 99,9 % de la puissance du signal.

Pourquoi utiliser les complexes

Comme dit plus haut, on étudie des **systèmes linéaires**, c'est à dire un système avec un signal e en entrée et un signal s en sortie et dont le fonctionnement est décrit par une équation différentielle linéaire.

$$e \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s$$

Par exemple $e = 5\,s' + s$.

Au lieu de considérer e et s dans toute leur complexité, on décompose e en série de Fourier et on traite séparément chaque harmonique. On doit donc résoudre des équations de forme :

$$a_n \cos(n\omega t) = 5\,s' + s \quad \text{et} \quad b_n \sin(n\omega t) = 5\,s' + s$$

C'est possible mais ce n'est pas si simple : il faut savoir que $s = A\cos(n\omega t) + B\sin(n\omega t)$ puis chercher A et B dans le cas a_n et dans le cas b_n...

À la place, on se souvient que l'on peut décomposer $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$ en des $\mathrm{e}^{i\,n\omega t}$. La décomposition en série de Fourier complexe nous fait écrire $e = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{i\,n\omega t}$. Raisonnant de la même façon, on considère juste un élément de la série en entrée, $c_n\mathrm{e}^{i\,n\omega t}$, et on cherche ce que cela produit en sortie. Donc on cherche à résoudre pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n\mathrm{e}^{i\,n\omega t} = 5\,s' + s$$

Cette équation est beaucoup plus simple. Il suffit de savoir que $s = A\mathrm{e}^{i\,n\omega t}$ et chercher A. On obtient tout de suite :

$$c_n\mathrm{e}^{i\,n\omega t} = 5\,A\,i\,n\omega\,\mathrm{e}^{i\,n\omega t} + A\mathrm{e}^{i\,n\omega t} \Rightarrow A = \frac{c_n}{1 + 5\,i\,n\omega}$$

$$c_n\mathrm{e}^{i\,n\omega t} \longrightarrow \boxed{\times\frac{1}{1+5\,i\,n\omega}} \longrightarrow \frac{1}{1+5\,i\,n\omega}\cdot c_n\mathrm{e}^{i\,n\omega t}$$

Ainsi on voit que le système se contente de multiplier l'entrée par $H = \frac{1}{1+5\,i\,n\omega}$. On s'intéresse en particulier au gain $G = |H|$ et au déphasage $\varphi = Arg(H)$.

Les coefficients de la décomposition complexe

Une seule formule suffit :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega t}$$

Cette fois, $n \in \mathbb{Z}$, c'est à dire qu'il y a des coefficients ..., c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, ...

Mais quand f est réel, il n'est pas nécessaire de calculer les c_n avec $n < 0$ car $c_n = \overline{c_n}$.

On peut faire le lien avec les a_n et b_n :

$$c_0 = a_0 \quad ; \quad \text{si } n \neq 0, a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j\,c_n - j\,c_{-n}, \quad c_n = \frac{a_n - j\,b_n}{2}$$

Série : $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \mathrm{e}^{j\,n\,\omega\,t}$

Spectre : En décomposition complexe, le spectre s'étend symétriquement du côté négatif. On a donc deux fois plus de raies mais des raies deux dois plus petites.

Parseval : $\langle f^2 \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^2|$