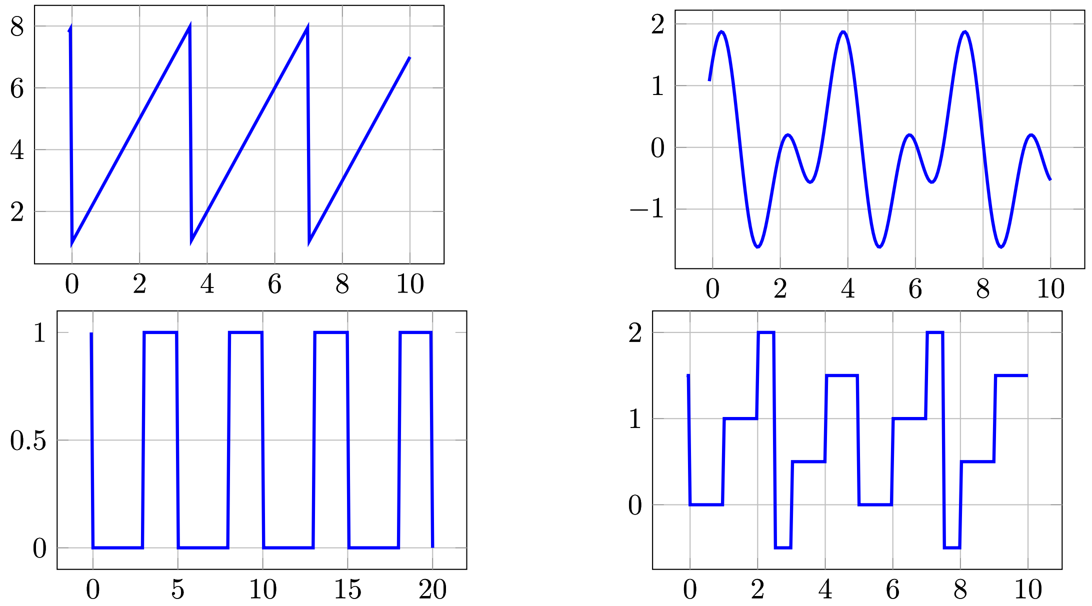
Exo 1 période et pulsation

Pour les signaux suivants, donnez T et ω.



Exo 2 Dans les cas suivant, on vous demande de tracer deux périodes du signal s.

(a) s pair et de période 4 et :

$$s(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

(b) s de période 3 et :

$$s(t) = \begin{cases} 2t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 3 - t \text{ si } 1 < t < 3 \end{cases}$$

(c) s de période 2π et sur $[0; 2\pi]$,
$s(t) = t\,(2\pi - t)$

Exo 3 Tracer les courbes correspondantes.

(a) $S(t) = 0,637\sin(\pi\, t) - 0,318\sin(2\pi\, t) + 0,212\sin(3\pi\, t) - 0,159\sin(4\pi\, t)$

(b) $S(t) = 0,25 - 0,405\cos(\pi t) + 0,203\cos(2\pi t) + 0,045\cos(3\pi t) + 0,016\cos(5\pi t) + 0,023\cos(6\pi t)$

Exo 4 Donnez les primitives

(a) $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$

(b) $f(t) = \cos(t)$

(c) $f(t) = \sin(t)$

(d) $f(t) = 4\sin(10t)$

(e) $f(t) = 4\cos(n\omega t)$

Exo 5 Intégrales

(a) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \left(5t^2 + t + 2\right)\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos(t)\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^\pi 9\cos(n\,t)\mathrm{d}t$

Exo 6 Coefficients de Fourier

Calculez a_n et b_n dans les cas suivants :

(a) période $T = 2$, f impaire, $f(t) = 1$ pour $0 \leqslant t < 1$

(b) période $T = 3$, $f(t) = 1$ pour $0 \leqslant t < 1$ et 0 sinon.

(c) période $T = 1$, $f(t) = t$ sur $[0; 1[$.

On pourra utiliser le résultat suivant obtenu avec un logiciel de calcul formel :

$\text{integrate}(t\cos(n\,\omega\,t), t, 0, T) = -\dfrac{1}{n^2\omega^2} + \dfrac{\cos(T\,n\,\omega) + T\,n\,\omega\,\sin(T\,n\,\omega)}{n^2\omega^2}$
$\text{integrate}(t\sin(n\,\omega\,t), t, 0, T) = \dfrac{\sin(T\,n\,\omega) - T\,n\,\omega\,\cos(T\,n\,\omega)}{n^2\omega^2}$

Exo 7 Convergence

Précisez s'il y a convergence $S_f \to f$ et s'il des t pour lesquels $S_f(t) \neq f(t)$.

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$, de période $T = 2$

(b) $f(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$, paire et période $T = 4$

(c) $f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

(d) $f(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

Exo 8 Pair et impair

Calculez les coefficients a_n et b_n dans les cas suivants :

(a) f impaire, de période $T = 6$ avec $f(t) = \begin{cases} 0,5 \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t < 2 \\ 0,5 \text{ si } 2 < t < 3 \end{cases}$,

(b) f paire et de période $T = 2$ avec $f(t) = \begin{cases} 1 - 2t \text{ si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$.

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2t)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t = \frac{2}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}$$

Exo 9 Puissance

Calculer P dans les cas suivants :

(a) $u(t) = 12$

(b) $u(t) = K$

(c) $u(t) = t$ sur $[0; 2]$ et période $T = 2$

(d) $u(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t < 2 \end{cases}$, paire et période $T = 4$

(e) $u(t) = A\sin(\omega\,t)$

(f) $u(t) = A\cos(\omega\,t)$

(g) $u(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

Exo 10 Parseval

f paire, de période $T = 2$ et sur $[0;1]$, $f(t) = 1 - t$.

(a) Justifier que les coefficients b_n sont nuls.

(b) Montrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

(c) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

```
int((1-t)*cos(n*omega*t),t,0,T/2)
```

$$\frac{1}{n^2 * \omega^2} + \frac{-2*\cos\left(\frac{T*n*\omega}{2}\right) + 2*n*\omega*\sin\left(\frac{T*n*\omega}{2}\right) - T*n*\omega*\sin\left(\frac{T*n*\omega}{2}\right)}{2*n^2*\omega^2}$$

En déduire que $a_n = \dfrac{2}{\pi^2\, n^2}\left(1 - (-1)^n\right)$

(d) Calculer $P = \overline{f^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(t)^2 \mathrm{d}t$

(e) Soit $S_N(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n \cos(n\,\pi\,t)$ une série de Fourier incomplète.

Déterminer la valeur de N pour laquelle la puissance de S_N atteint $99,9\,\%$ de P ?

Exo 11

Vérifiez que les deux signaux dont les décomposition sont données ci-dessous, ont bien le même spectre.

n	a_n	b_n
0	0	/
1	0	$1,27$
2	0	0
3	0	$0,42$
4	0	0
5	0	$0,25$
6	0	0

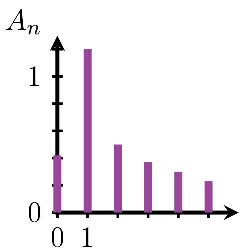
n	a_n	b_n
0	0	/
1	$-0,64$	$1,10$
2	0	0
3	$-0,42$	0
4	0	0
5	$0,13$	$-0,22$
6	0	0

Exo 12 Soit la fonction f de période $T = 2\pi$

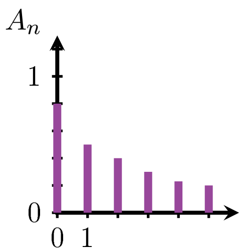
f développable en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geqslant 1}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\right]$$

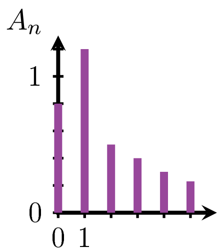
Indiquez le spectre correspondant.



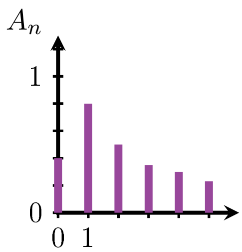
(a)



(b)



(c)



(d)