

Équations différentielles – Résolution ordre 2

I. Problème

Dans le cours sur l'ordre 1, nous avons une équation de la forme :

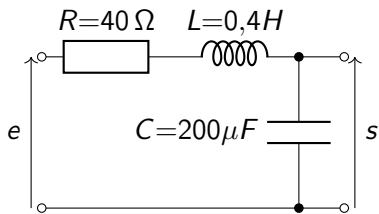
$$(E) : ay' + by = f(t) \quad \text{avec } y(0) = \dots$$

À l'ordre 2, l'équation est plus compliquée. Elle va comporter un terme en y'' . On devra également fixer une 2e condition initiale.

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t) \quad \text{avec } y(0) = \dots \text{ et } y'(0) = \dots$$

La méthode est quasiment la même, que pour l'ordre 1 mais les calculs sont plus lourds.

II. Exemple



La physique nous donne

$$(E) : e = LCs'' + RCs' + s$$

Avec les données du problème :

$$(E) : 100 = 80\mu s'' + 8m s' + s$$

Dans cette équation, $\mu = 10^{-6}$ et $m = 10^{-3}$

Conditions initiales : $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.

III. Méthode

Comme déjà dit, la méthode est la même que pour l'ordre 1.

La seule différence porte sur la première étape : la **résolution de l'équation sans second membre**.

III. 1) Équation sans second membre

$$(E_0) : a y'' + b y' + c y = 0$$

Il faut résoudre l'équation caractéristique : $a r^2 + b r + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, $y_0 = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$
- Quand $\Delta = 0$, $y_0 = (A t + B) e^{r_0 t}$
- Quand $\Delta < 0$, $y_0 = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$

Dans ce cas, exponentielles complexes...

On préfère souvent, avec : $r = a \pm ib$:

$$y_0 = e^{a t} (A \cos(b t) + B \sin(b t))$$

A et B sont des constantes à déterminer selon les conditions initiales.

Dans le cas $\Delta < 0$ on peut préférer les formes $A e^{a t} \cos(bt + \varphi)$ ou $A e^{a t} \sin(bt + \varphi)$. Il faut alors choisir A et φ .

Exemple

$$(E) : 100 = 80\mu s'' + 8m s' + s$$

L'équation sans second membre est :

$$(E_0) : 80\mu s'' + 8m s' + s = 0$$

On cherche donc à résoudre l'équation caractéristique :

$$80\mu r^2 + 8m r + 1 = 0$$

On obtient $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 80\mu \times 1 = -256\mu < 0$

Les racines sont $r_1 = \frac{-8m - j\sqrt{256\mu}}{2 \times 80\mu} = -50 - 100j$ et $r_2 = -50 + 100j$. Les racines sont donc de la forme $-50 \pm 100j$.

$$s_0 = Ae^{-50t} \cos(100t + \varphi)$$

III. 2) Second membre

Pas de différence avec l'ordre 1...

Exemple

$$(E) : 100 = 80\mu s'' + 8m s' + s$$

Comme $f(t) = 100$ est une constante, on cherche $s = C^{te}$.

- Donc $s' = 0$ et $s'' = 0$,
- on remplace dans l'équation :

$$100 = 80\mu \times 0 + 8m \times 0 + C^{te} \Rightarrow C^{te} = 100$$

Donc $s_1 = 100$ est solution particulière de (E) .

C'était simple. C'est beaucoup plus long si $f(t) = \sin(\omega t)...$

III. 3) Solution générale

Identique encore à l'ordre 1...

On dira que la solution générale de (E) s'écrit :

$$y = y_0 + y_1$$

Exemple

$$(E) : 100 = 80\mu s'' + 8m s' + s$$

On a trouvé :

- $s_0 = Ae^{-50t} \cos(100t + \varphi)$
- $s_1 = 100$

Les solutions de (E) s'écrivent donc :

$$s = 100 + Ae^{-50t} \cos(100t + \varphi)$$

III. 4) Condition initiale

Encore la même chose que pour l'ordre 1. Il y a tout de même une petite différence : il faut choisir deux paramètres dans la solution et pour cela nous disposons de deux conditions initiales.

Exemple

$$(E) : 100 = 80\mu s'' + 8m s' + s, \quad \text{avec } s(0) = 0 \text{ et } s'(0) = 0$$

On sait déjà que $s(t) = 100 + Ae^{-50t} \cos(100t + \varphi)$.

Pour la suite on va avoir besoin de calculer $s'(t)$...

$$s'(t) = -50Ae^{-50t} \cos(100t + \varphi) - 100Ae^{-50t} \sin(100t + \varphi)$$

- $s(0) = 100 + A \cos(\varphi)$ et $s(0) = 0$
- $s'(t) = -50A \cos(\varphi) - 100A \sin(\varphi)$ et $s'(0) = 0$.

On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} 100 + A \cos(\varphi) = 0 \\ -50A \cos(\varphi) - 100A \sin(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Exemple, suite

$$\begin{cases} 100 + A \cos(\varphi) = 0 \\ -50A \cos(\varphi) - 100A \sin(\varphi) = 0 \end{cases}$$

On peut travailler la 2e équation :

$$-50A \cos(\varphi) - 100A \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{1}{2}$$

donc $\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0,46$.

Et dans la première équation : $A = -\frac{100}{\cos(\varphi)} \approx -111,8$

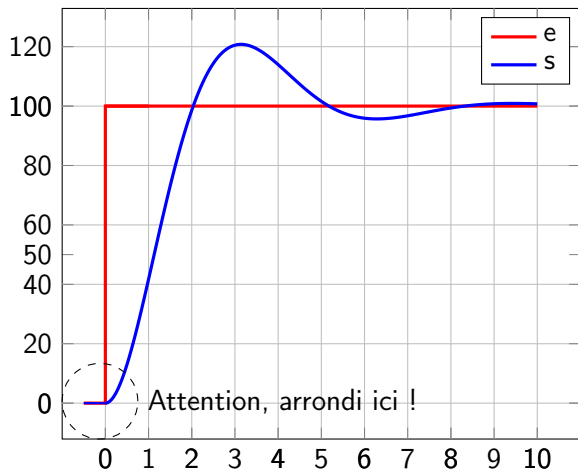
Finalement, la solution est :

$$s(t) \approx 100 - 111,8e^{-50t} \cos(100t - 0,46)$$

À la première étape, on aurait pu choisir la forme $s_0 = e^{at}(A \cos(bt) + B \sin(bt))$ ce qui nous aurait donné au final :

$$s(t) = 100 - 100e^{-50t}(\cos(100t) + 0,5 \sin(100t))$$

Courbe de la solution



$$\begin{aligned} s(t) &\approx 100 - 111,8e^{-50t} \cos(100t - 0,46) \\ &= 100 - 100e^{-50t} (\cos(100t) + 0,5 \sin(100t)) \end{aligned}$$