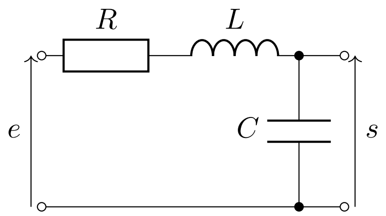
Équations différentielles, cas harmonique

Situation de problème

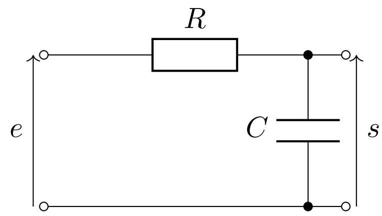


Le montage ci-contre permet d'obtenir l'équation différentielle :

$$(E_{2^{nd}ordre}) : \quad LC\, s''(t) + RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Et voici un exemple du premier ordre :

$$(E_{1^{er}ordre}) : \quad RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$$



Dans la suite, on aura l'entrée e et l'expontielle e également... Pour éviter les confusions, j'écrirais toujours $e(t)$ pour l'entrée. L'exponentielle viendra elle toujours avec un exposant comme $e^{j\omega t}$. On pourra donc les distinguer.

La méthode en 4 points

Nous avons étudié une méthode de résolution en 4 points :

(1) Résolution de l'équation sans second membre.

Dans les équations précédentes, on enlève le terme sans $e(t)$ et on met 0 à la place.

Dans les situations réelles, cette solution aura toujours une forme contenant un terme en $e^{-a\,t}$. Ce terme tend donc à disparaître au bout d'un moment. On parle de **régime transitoire**.

(2) Trouver une solution particulière à l'équation.

- c'est simple quand $e(t) = constante$
- c'est beaucoup plus compliqué quand $e(t) = \sin \cos$ [cas **harmonique**]
- simplement réunir les deux morceaux précédents
- la solution trouvée au point (1) contient toujours une partie ajustable. On tien ici compte des conditions initiales pour fixer cette partie ajustable.

Les deux situations de problème

Dans les problèmes d'électricité ou de physique que vous êtes susceptibles de rencontrer, il y a deux situations principales :

- $e(t) = constante$. Dans ce cas, on s'intéresse au régime transitoire. Il faut traiter les points (1) à (4). Ce n'est pas trop difficile. En particulier, le point (2) est très simple.
- $e(t) = \sin, \cos$, cas harmonique. Dans ce cas, le régime transitoire ne nous intéresse pas. On ne s'intéresse qu'au régime **permanent** quand la partie en $e^{-a\,t}$ du régime transitoire a disparu.

  Dans ce cas, les point (1), (3) et (4) n'ont plus d'intérêt. Seul le morceau calculer en (2) va rester.

Cas harmonique

Dans le cas harmonique, seule l'étape (2) a un intérêt. Mais elle est difficile. On peut, pour alléger les calculs trigonométriques, utiliser une technique basée sur les complexes.

En général, l'équation a la forme :

$$a\,s''(t) + b\,s'(t) + c\,s(t) = e(t) = \begin{cases} E\cos(\omega t) \\ E\sin(\omega t) \end{cases}$$

On cherche une solution de forme $s(t) = \begin{cases} S\cos(\omega t + \varphi) \\ S\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$ (Comprenez que si $e(t)$ est en cos, $s(t)$ le sera aussi ; si $e(t)$ est en sin, $s(t)$ aussi)

Astuce complexe : On résout en remplaçant $cos(\omega t)$ (ou bien $\sin(\omega t)$) par $e^{j\omega t}$.
De même, on remplace $\cos(\omega t + \varphi)$ (ou $\sin(\omega t + \varphi)$) par $e^{j\omega t + j\varphi}$.

Cela n'a rien d'évident mais on **admettra** que l'on trouve le bon S et le bon φ en faisant de cette manière.

Alors $s(t) = Se^{j\omega t + j\varphi} \Rightarrow s'(t) = j\omega Se^{j\omega t + j\varphi} \Rightarrow s''(t) = (j\omega)^2 Se^{j\omega t + j\varphi}$

On observe que dériver revient à multiplier par $j\omega$.
En remplaçant dans l'équation :

$$a\,(j\omega)^2 Se^{j\omega t + j\varphi} + b\,j\omega Se^{j\omega t + j\varphi} + c\,Se^{j\omega t + j\varphi} = Ee^{j\omega t}$$

On voit que l'on peut factoriser $Se^{j\omega t + j\varphi}$:

$$\left[a\,(j\omega)^2 + b\,j\omega + c\right] Se^{j\omega t + j\varphi} = Ee^{j\omega t}$$

Et comme $e(t) = Ee^{j\omega t}$ et $s(t) = Se^{j\omega t + j\varphi}$,

$$\left[a\,(j\omega)^2 + b\,j\omega + c\right] s(t) = e(t)$$

On retrouve donc la fonction de transfert des électroniciens :

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Se^{j\omega t + j\varphi}}{Ee^{j\omega t}} = \frac{S}{E}e^{j\varphi} = \frac{1}{a\,(j\omega)^2 + b\,j\omega + c}$$

Conclusion

Partant d'une équation comme :

$$a\,s''(t) + b\,s'(t) + c\,s(t) = e(t) = \begin{cases} E\cos(\omega t) \\ E\sin(\omega t) \end{cases} \quad \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{a\,(j\omega)^2 + b\,j\omega + c}$$

- Le module $G = |H(j\omega)|$ est le gain. On déduit $S = G \times E$.
- L'argument $\varphi = Arg(H(j\omega))$ donne le déphaség e.

La solution particulière (ou solution de régime permanent) est alors :
$s(t) = \begin{cases} S\cos(\omega t + \varphi) \\ S\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$, selon le cas.

Exemple d'ordre 2

$$2s''(t) + 3s'(t) + s(t) = 20\sin(1,2t)$$

On reconnaît :
- $a = 2$; $b = 3$; $c = 1$
- $E = 20$; $\omega = 1,2$.

On calcule H directement :

$$H(j\omega) = \frac{1}{2 \times (1,2j)^2 + 3 \times 1,2j + 1} = \frac{1}{-1,88 + 3,6j}$$

Une calculatrice sait faire les calculs complexes. On obtient :
- module : $G = \left|\frac{1}{-1,88+3,6j}\right| \approx 0,246$
  On en déduit $S = G \times E \approx 4,9$
- Argument : $\varphi = Arg\left(\frac{1}{-1,88+3,6j}\right) \approx -117,6°$

On en déduit que :

$$s(t) \approx 4,9\sin(1,2t - 117,6°)$$

Exemple symbolique

Je prends l'exemple de l'ordre 1 :

$$RCs'(t) + s(t) = E\cos(\omega t)$$

Même travail :

$$H(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega + 1}$$

- module : $G = \left|\frac{1}{jRC\omega+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$
- Argument : $\varphi = Arg\left(\frac{1}{jRC\omega+1}\right) = -Arg(1 + jRC\omega) = -\arctan(RC\omega)$

Ce qui permet de résoudre :

$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\cos(\omega t - \arctan(RC\omega))$$

Le plus souvent, on ne s'intéresse pas tellement à φ. En effet, φ aura surtout de l'importance si on s'intéresse à des problématiques de temps de réponse, de stabilité. Ce sont des problèmes d'automaticiens.

On étudie donc plutôt G, c'est ce que l'on fait avec un diagramme de Bode.