

## Équations différentielles

### Premier ordre

$$(E) : ay' + by = f(t)$$

- (1) Résoudre l'équation sans second membre C'est l'équation dont il ne reste que les termes en  $y$  et  $y'$ .

$$(E_0) : ay' + by = 0 \Rightarrow y' = \alpha y$$

La solution générale à  $(E_0)$  est :  $y_0 = K \cdot e^{\alpha t}$ ,  $K \in \mathbb{R}$

**Exemple :** avec  $(E) : 3y' + y = 12$  on obtient  $(E_0) : 3y' + y = 0$  donc  $y' = -\frac{1}{3}y$  et donc  $y_0 = Ke^{-\frac{1}{3}t}$ .

#### Remarques :

- On veut résoudre  $(E)$ , pas  $(E_0)$ . Résoudre  $(E_0)$  est juste une étape qui nous permet à la résoudre  $(E)$ .
  - On utilise l'indice 0 dans  $y_0$  seulement pour étiqueter cette solution, pour pouvoir en reparler facilement à l'étape (3)
- (2) Trouver une solution particulière de  $(E)$ . Il faut deviner quoi choisir selon  $f(t)$ . Voici

les exemples les plus courants :

- si  $f(t) = C^{ste}$ , alors on cherche  $y = C^{ste}$  aussi,
- si  $f(t) = Polynome$ , alors on cherche  $y = Polynome$  de même degré,
- si  $f(t) = E \cos(\omega t)$ , alors on cherche  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ ; on peut aussi chercher  $y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ ,
- si  $f(t) = E \sin(\omega t)$ , alors on cherche  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ ; on peut aussi chercher  $y = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ ,
- si  $f(t) = Ee^{at}$  on cherche  $y = Ae^{at}$ .

Une fois que l'on a choisi une forme, on remplace  $y$  dans l'équation pour savoir quels paramètres choisir.

**Exemple :** avec  $3y' + y = 12$ , on essaie  $y = C^{ste}$ , donc  $y' = 0$  ce qui donne dans l'équation  $3 \times 0 + C^{ste} = 12$ . On en déduit que  $y_1 = 12$  est une solution.

On choisit de nommer  $y_1$  la solution trouvée.

- (3)  $y = y_1 + y_0$  est solution générale de  $(E)$ .

**Exemple :** avec  $3y' + y = 12$ , on obtient  $y = 12 + Ke^{-\frac{1}{3}t}$ ,  $K \in \mathbb{R}$

- (4) La condition initiale, souvent  $y(0)$ , permet de fixer  $K$ .

**Exemple :** Supposons que dans l'exemple suivi on ait en plus  $y(0) = 0$ . Alors on sait que  $y(t) = 12 + Ke^{-\frac{1}{3}t}$ , donc en 0 on a  $y(0) = 12 + K$  donc  $12 + K = 0 \Rightarrow K = -12$ . On peut donc conclure que l'unique solution de  $(E)$  respectant la contrainte  $y(0) = 0$  est  $y(t) = 12 - 12e^{-\frac{1}{3}t}$

**Deuxième ordre**

$$(E) : a y'' + b y' + c y = f(t)$$

La méthode est semblable au cas de l'ordre 1. Seule la première étape est différente.

(1) Résoudre l'équation sans second membre  $(E_0) : a y'' + b y' + c y = 0$

Pour cela, il faut chercher les racines de  $a r^2 + b r + c = 0$ .

(a) Quand  $\Delta > 0$ ,  $y_0 = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$   $A, B \in \mathbb{R}$

(b) Quand  $\Delta = 0$ ,  $y_0 = (A t + B) e^{r_0 t}$   $A, B \in \mathbb{R}$

(c) Quand  $\Delta < 0$ ,  $y_0 = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$   $A, B \in \mathbb{C}$

Cette écriture est a priori complexe. Comme l'équation et sa solution sont réelles on doit avoir  $r_2 = \overline{r_1}$  et  $B = \overline{A}$ . Il est souvent plus simple d'utiliser la forme :

$$r = a \pm ib \Rightarrow y_0 = e^{a t} (A \cos(b t) + B \sin(b t)), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

On peut aussi utiliser les formes suivantes (les deux possibles) :

$$y_0 = A e^{a t} \cos(b t + \varphi) \quad \text{ou} \quad y_0 = B e^{a t} \sin(b t + \varphi)$$

(2) Trouver une solution particulière de  $(E)$ .

On peut l'appeler  $y_1$ . Les cas sont exactement les mêmes que dans le cas précédent.

**Remarque :** Les deux cas vraiment utiles sont les cas  $f(t) = C^{ste}$  et  $f(t) = \sin$  ou  $\cos$ . *Voir plus bas.*

(3)  $y = y_1 + y_0$  est solution générale de  $(E)$ .

(4) Les conditions initiales, souvent  $y(0)$  et  $y'(0)$ , permettent de fixer  $A$  et  $B$ .

**Remarque :** Cette étape est un peu fastidieuse et on ne l'entreprendra que dans les cas où elle apporte quelque chose. *Voir plus bas.*

**Les deux situations**

Les cas de problèmes les plus courants sont les suivants :

- On s'intéresse à ce qui se produit au tout début de l'expérience, en  $t = 0$  et juste après. C'est le problème d'un automaticien qui veut s'assurer que son système réagit bien quand on lui demande brusquement de changer de position. Dans ce cas,  $f(t) = C^{ste}$ . Seule l'étape (4) peut-être difficile.
- On s'intéresse à une réponse harmonique d'un circuit électrique, c'est à dire  $f(t) = \sin$  ou  $\cos$ . Dans ce cas on s'intéresse à ce qui se passe pour un temps assez grand, quand le morceau de solution en  $e^{a t}$  sera devenu  $\approx 0$ . Donc, dans ce cas, les étapes (1), (3) et (4) n'ont aucun intérêt. Seule l'étape (2) est utile. On pourra utiliser la méthode complexe (les impédances complexes) ce qui fait gagner beaucoup de temps et d'efforts.