On considère un système obéissant à une l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) : \quad \kappa\, s''(t) + 2m\kappa\, s'(t) + s(t) = E$$

On a de plus les conditions initiales $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.

m est appelé l'**amortissement**. On verra pourquoi ensuite.

E, m et κ sont des constantes positives. On pourra noter $\kappa = \frac{1}{\omega_0^2}$.

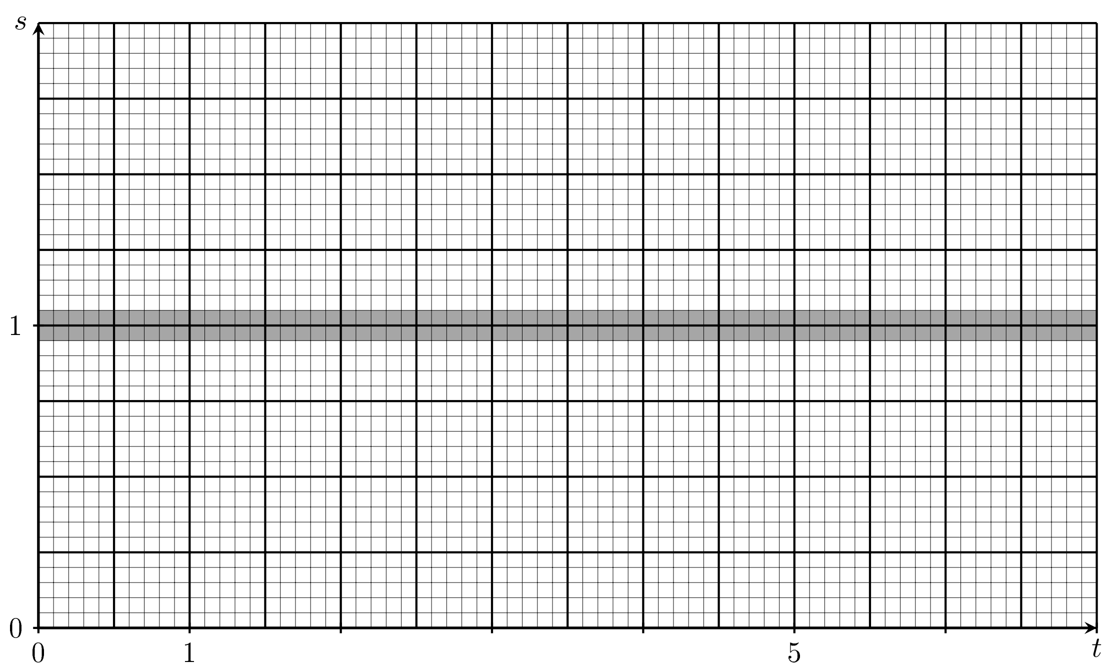
1) Donnez l'unité de κ et de m.
2) Écrivez l'équation caractéristique puis :
   a) exprimez Δ,
   b) donnez les différents cas selon les valeurs de m et de κ.
3) Pour la suite on se place dans le cas où $0 < m < \omega_0$.

   Calculez les racines dans ce cas.

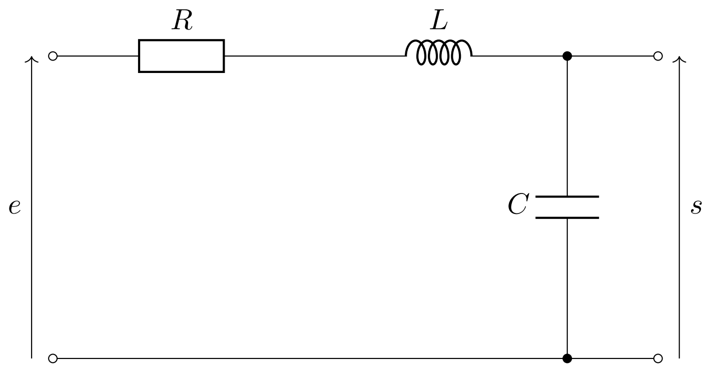
   On notera $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - m^2}$.
4) Déduisez-en l'expression s_0 d'une solution générale de $(\mathcal{E}_0)$, l'équation sans second membre.
5) Donnez une solution de $(\mathcal{E})$ de forme $s = c$. Soit s_1 cette solution.
6) Donnez la forme d'une solution générale de $(\mathcal{E})$.
7) Vérifiez que la fonction suivante est bien **la solution** de $(\mathcal{E})$ qui vérifie les conditions initiales.

$$s(t) = E - \left(\cos(\omega\, t) + \frac{m}{\omega}\sin(\omega\, t)\right) \cdot E \cdot \mathrm{e}^{-m\,t}$$

8) Déterminer $s_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$. On appellera cette limite « valeur finale de s ».
   Donner une interprétation graphique de cette limite.
9) Tracer la courbe représentative de $s(t)$ sur le graphique ci-dessous :
   (a) $\omega_0 = 3\,rad \cdot s^{-1}$ et $m = 0,6\,s^{-1}$ en rouge.
   (b) $\omega_0 = 3\,rad \cdot s^{-1}$ et $m = 2,1\,s^{-1}$ en bleu.
10) On appelle temps de réponse le temps t_R nécessaire pour que le signal entre dans la zone $s_\infty \pm 5\,\%$, donc ici la zone grisée allant de $0,95$ à $1,05$.
    Donnez t_R dans les deux cas précédents.



Exemple d'application



La physique nous donne :

$$(\mathcal{E}) : e = LCs'' + RCs' + s$$

1) Exprimez κ.
2) Exprimez ω_0.
3) Exprimez m.

Constatations :

- R agit uniquement sur m : on comprend que m représente le frottement, la dissipation d'énergie. Dans ce circuit, R est le sel à dissiper de l'énergie.
- L et C agissent sur ω_0, la pulsation propre du système. C'est la présence des deux composants qui entraîne une oscillation.

Exemples de valeurs :

Prenons $R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,nF$ et $L = 1\,mH$.

1) Calculez ω_0 et m.
2) Aura-t-on des oscillations dans ce cas ?
3) Ci-dessous, on vous donne une courbe. Il faut placer $\frac{m}{\omega_0}$ sur l'axe horizontal.
   On obtient $t_{95\,\%} \cdot \omega_0$ sur l'axe vertical.

   Utilisez cette courbe pour obtenir $t_{95\,\%}$.
   Vous pouvez en profiter pour vérifier les $t_{95\,\%}$ de la première partie.