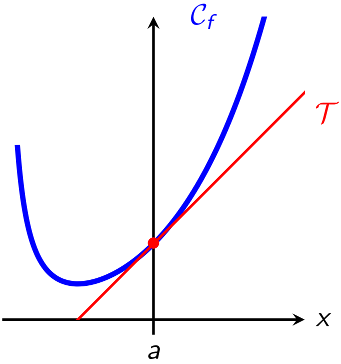
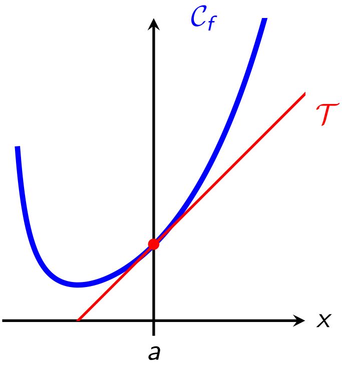
Approximation locale – Développement limité

I. Dérivée



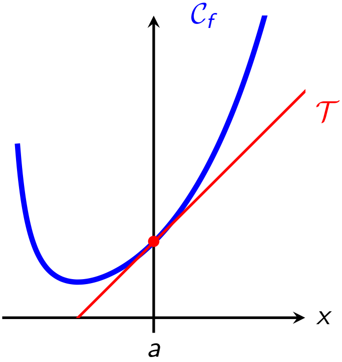
- Tangente $\mathcal{T}$ est une approximation de la courbe $\mathcal{C}_f$.



- Tangente $\mathcal{T}$ est une approximation de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- À l'abscisse a,
  $\mathcal{T} \quad : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$

  Attention : a et x sont deux abscisses.

  Rappel : $f'(a)$ est le coefficient directeur.



- Tangente $\mathcal{T}$ est une approximation de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- À l'abscisse a,
  $\mathcal{T} \quad : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$

  Attention : a et x sont deux abscisses.

  Rappel : $f'(a)$ est le coefficient directeur.
- Si $x \to a$ on peut dire :

$$f(x) \simeq f'(a)(x-a) + f(a)$$

On **approxime** f par une **fonction affine**.

II. Généralisation

II. 1) Ordre 1

- Dans tout ce qui va suivre, on prendra $a = 0$.
- On saura que l'approximation dont on parle est valable quand $x \to 0$.

II. 1) Ordre 1

- Dans tout ce qui va suivre, on prendra $a = 0$.
- On saura que l'approximation dont on parle est valable quand $x \to 0$.
- On a dit $f(x) \simeq f'(a)(x - a) + f(a)$, donc si $a = 0$

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)\,x = a_0 + a_1\,x$$

C'est une expression de **degré 1** $\to$ **ordre 1**.

Il faudrait préciser ce qu'on entend exactement par $\simeq$...

II. 2) Ordre n

On généralise : On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n en 0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

II. 2) Ordre n

On généralise : On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n en 0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- Le terme $a_n\, x^n$ est le terme d'ordre n.

II. 2) Ordre n

On généralise : On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n en 0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- Le terme $a_n\, x^n$ est le terme d'ordre n.
- Quand $x \to 0$ le terme d'ordre n est négligeable devant les termes d'ordre inférieur.

Par exemple, $1000x^3$ devient négligeable devant $2x^2$.

II. 2) Ordre n

On généralise : On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n en 0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- Le terme $a_n\,x^n$ est le terme d'ordre n.
- Quand $x \to 0$ le terme d'ordre n est négligeable devant les termes d'ordre inférieur.

Par exemple, $1000x^3$ devient négligeable devant $2x^2$.

- Par $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ il faut comprendre : une quantité qui devient négligeable devant les termes d'ordre $\leqslant n$

C'est ainsi que l'on précise le sens du $\simeq$.
Ne pas trop s'en soucier pour l'instant.

II. 2) Ordre n

On généralise : On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n en 0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- Le terme $a_n\,x^n$ est le terme d'ordre n.
- Quand $x \to 0$ le terme d'ordre n est négligeable devant les termes d'ordre inférieur.

Par exemple, $1000x^3$ devient négligeable devant $2x^2$.

- Par $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ il faut comprendre : une quantité qui devient négligeable devant les termes d'ordre $\leqslant n$

C'est ainsi que l'on précise le sens du $\simeq$.
Ne pas trop s'en soucier pour l'instant.

- Au lieu de $x^n\varepsilon(x)$ on note parfois $o(x^n)$.

Qu'entend-on par « négligeable » ?

Prenons $1000\,x^3$ et $2\,x^2$.
L'idée est que quand $x \to 0$, le premier devient négligeable devant le second :

x	1	$0,1$	$0,01$	$0,001 = 1E-3$	$1E-4$
$1000\,x^3$	1000	1	$0,001$	$1E-6$	$1E-9$
$2\,x^2$	2	$0,02$	$0,0002$	$2E-6$	$2E-8$

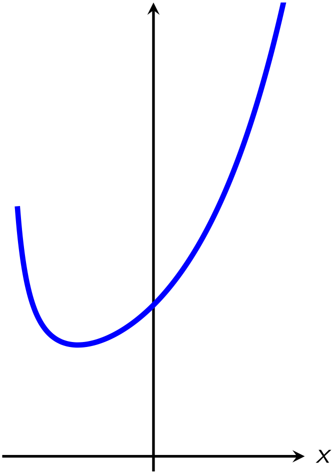
Qu'entend-on par « négligeable » ?

Prenons $1000\,x^3$ et $2\,x^2$.
L'idée est que quand $x \to 0$, le premier devient négligeable devant le second :

x	1	$0,1$	$0,01$	$0,001 = 1E-3$	$1E-4$
$1000\,x^3$	1000	1	$0,001$	$1E-6$	$1E-9$
$2\,x^2$	2	$0,02$	$0,0002$	$2E-6$	$2E-8$

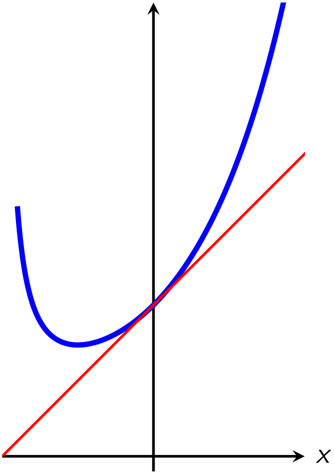
On s'intéresse à $x \to 0$ et quand $x \to 0$, x^3 finit toujours par devenir plus petit et même beaucoup plus petit que x^2. Même si on 1000 devant. De la même façon, x^4 devient négligeable devant x^3 et ainsi de suite.

Exemple graphique



Considérons la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(2x)}{x+1}$ tracée en bleu.

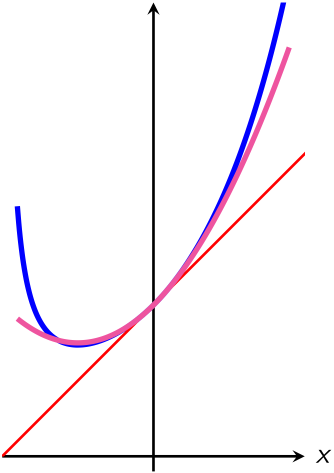
Exemple graphique



Considérons la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(2x)}{x+1}$ tracée en bleu.

- À l'ordre 1, $x \mapsto 1 + x$ correspond à la tangente, en rouge.

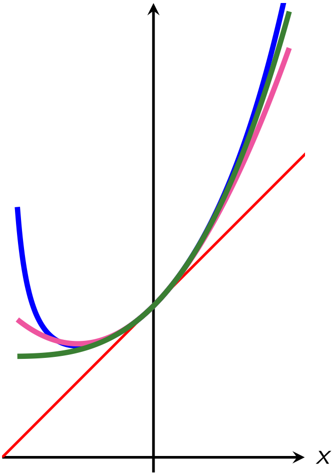
Exemple graphique



Considérons la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(2x)}{x+1}$ tracée en bleu.

- À l'ordre 1, $x \mapsto 1 + x$ correspond à la tangente, en rouge.
- À l'ordre 2, $x \mapsto 1 + x + x^2$ en rose.

Exemple graphique



Considérons la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(2x)}{x+1}$ tracée en bleu.

- À l'ordre 1, $x \mapsto 1 + x$ correspond à la tangente, en rouge.
- À l'ordre 2, $x \mapsto 1 + x + x^2$ en rose.
- À l'ordre 3, $x \mapsto 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{3}$ en vert.

On constate qu'en augmentant l'ordre, on se rapproche de la courbe d'origine.
L'idée est de choisir un ordre pas trop haut pour rester simple, mais assez haut pour être assez précis.

Développer à l'ordre...

On peut faire le calcul assez loin :

$$\frac{\exp 2x}{1+x} = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \cdots$$

Dire que je développe (par exemple) à l'ordre 3, c'est dire que je négligerai tout ce qui est négligeable devant x^3. Donc on néglige le terme en x^4, en x^5, ...

$$\frac{\exp 2x}{1+x} = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Le terme $o(x^5)$ signifie qu'il y a là un morceau qu'on ne veut pas détailler et qui est négligeable devant x^3.

Le plus souvent, on se contente de l'ordre 1 et il est bien rare que l'on ait besoin d'aller au-delà de l'ordre 2.

II. 3) Calcul des coefficients

On a vu qu'à l'ordre 1, $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$. On peut généraliser la procédure :

Si f peut être dérivé n fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième et on a :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

II. 3) Calcul des coefficients

On a vu qu'à l'ordre 1, $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$. On peut généraliser la procédure :

Si f peut être dérivé n fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième et on a :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Justification :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots a_n x^n + o(x^n)$$

Si on peut dériver f, comme on peut dériver $a_0 + \cdots a_n\, x^n$, alors on peut aussi dériver $o(x^n)$

On peut alors dériver f et constater que quand on calcule $f^{(n)}(0)$ il ne reste que $n! a_n$.

Exemple 1 : $x \mapsto \exp(x)$

$f(x) = \exp(x)$, on a :

$$f'(x) = \qquad f''(x) = \qquad \cdots f^{(n)}(x) =$$

Et donc :

$$f'(0) = \quad ; \quad f''(0) = \quad \cdots \quad f^{(n)}(0) =$$

Donc :

$$a_0 = \quad ; \quad a_1 = \quad ; \quad a_2 = \quad \cdots \quad a_n =$$

Enfin :

$$\exp(x) =$$

Exemple 1 : $x \mapsto \exp(x)$

$f(x) = \exp(x)$, on a :

$$f'(x) = \exp(x) \quad f''(x) = \exp(x) \quad \cdots f^{(n)}(x) = \exp(x)$$

Et donc :

$$f'(0) = 1 \quad ; \quad f''(0) = 1 \quad \cdots \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Donc :

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \cdots \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

Enfin :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Exemple 2 : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, on a :

$$f'(x) = \qquad ; \quad f''(x) = \qquad ; \quad f^{(3)}(x) =$$

Et donc :

$$f'(0) = \qquad ; \quad f''(0) = \qquad ; \quad f^{(3)}(0) =$$

Donc :

$$a_0 = \qquad ; \quad a_1 = \qquad ; \quad a_2 = \qquad ; \quad a_3 =$$

Enfin :

$$\frac{1}{1+x} =$$

Exemple 2 : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad ; \quad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Et donc :

$$f'(0) = -1 \quad ; \quad f''(0) = 2 \quad ; \quad f^{(3)}(0) = -6$$

Donc :

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = -1 \quad ; \quad a_2 = 1 \quad ; \quad a_3 = -1$$

Enfin :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Autre technique : $x \mapsto \ln(1+x)$

Pour cette fonction, on pourrait faire comme précédemment, mais je propose une approche différente :

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots \Rightarrow f'(x) =$$

Or :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$$

On déduit :

$$a_1 = \qquad ; \quad a_2 = \qquad ; \quad a_3 = \qquad \text{et } a_0 = f(0) =$$

Conclusion :

$$\ln(1+x) =$$

Autre technique : $x \mapsto \ln(1+x)$

Pour cette fonction, on pourrait faire comme précédemment, mais je propose une approche différente :

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots \Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2\,x + 3a_3\,x^2 + \cdots$$

Or :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$$

On déduit :

$$a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad \text{et } a_0 = f(0) = 0$$

Conclusion :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Autre technique : $x \mapsto \cos(x)$

Là encore, une approche différente :

$$e^{i\,x} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$=$$

$$e^{-i\,x} = 1 + (-ix) + \frac{(-ix)^2}{2} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$=$$

On en déduit tout de suite :

$$\cos(x) = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2} =$$

Autre technique : $x \mapsto \cos(x)$

Là encore, une approche différente :

$$\begin{aligned}
e^{i\,x} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 + i\,x - \frac{x^2}{2} - i\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
e^{-i\,x} &= 1 + (-ix) + \frac{(-ix)^2}{2} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 - i\,x - \frac{x^2}{2} + i\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots
\end{aligned}$$

On en déduit tout de suite :

$$\cos(x) = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

III. Calculs

Calcul

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.

Calcul

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.
- On développe à partir de fonctions connues. Par exemple à l'ordre 2 :

$$\frac{\cos(x)}{1+x} = \overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}^{\cos(x)} \times \overbrace{\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right)}^{\frac{1}{1+x}}$$

$$=$$

Calcul

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.
- On développe à partir de fonctions connues. Par exemple à l'ordre 2 :

$$\frac{\cos(x)}{1+x} = \overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}^{\cos(x)} \times \overbrace{\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right)}^{\frac{1}{1+x}}$$

$$= 1 - x + x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2}o(x^4) + o(x^2) + \cdots$$

Les termes en rouge sont à l'ordre 3 et 4. Puisque l'on a décidé de s'arrêter à l'ordre 2, on considère que les termes d'ordre 3 ou 4 ou plus sont négligeables. On n'a même pas besoin de les écrire !

$$\frac{\cos(x)}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Remarques

Quand on écrit $o(x^2)$ cela veut dire « négligeable devant x^2. ».

Pas besoin de mettre de coefficient : $\frac{1}{2}o(x^2) \to o(x^2)$

Autrement dit, la moitié d'un truc négligeable devant x^2 est toujours un truc négligeable devant x^2, 10 fois un truc négligeable devant x^2 est toujours négligeable devant x^2, etc.

Par exemple $18x^3$ et $\frac{1}{2}\,18x^2$ sont tous deux négligeables devant x^2 et peuvent donc être remplacés par $o(x^2)$.

Remarques

Quand on écrit $o(x^2)$ cela veut dire « négligeable devant x^2. ».

Remarques

Quand on écrit $o(x^2)$ cela veut dire « négligeable devant x^2. ».

$o(x^2) + o(x^3) \to o(x^2)$

Autrement dit, ajouter des quantités négligeables devant x^2 donne toujours une quantité négligeable devant x^2.

Remarques

Quand on écrit $o(x^2)$ cela veut dire « négligeable devant x^2. ».

Attention, $o(x^2) - o(x^2) \neq 0$!

Les deux sont négligeables mais pas forcément égaux. La différence sera toujours négligeable mais pas forcément nulle.

Par exemple $3x^3$ et $2x^3$ sont tous les deux négligeables devant x^2 mais $3x^3 - 2x^3 \neq 0$.

Remarques

Quand on écrit $o(x^2)$ cela veut dire « négligeable devant x^2. ».

$o(x^n)$ permet au mathématicien de préciser l'approximation qu'il fait.

Souvent, le physicien qui n'a pas besoin d'une pareille rigueur, sous-entend l'approximation et n'indique pas $o(x^n)$.

Composition

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{1}{2+5x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.

Composition

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{1}{2+5x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.
- On peut chercher à faire apparaître une forme connue. Par exemple à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{2+5x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{5}{2}x}$$

Composition

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{1}{2+5x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.
- On peut chercher à faire apparaître une forme connue. Par exemple à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{2+5x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{5}{2}x}$$

On reconnaît la forme $\frac{1}{1+x}$ sauf qu'on a $\left(\frac{5}{2}x\right)$ à la place de x.
C'est valable car $x \to 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x \to 0$.

Composition

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{1}{2+5x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.
- On peut chercher à faire apparaître une forme connue. Par exemple à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{2+5x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{5}{2}x}$$

On reconnaît la forme $\frac{1}{1+x}$ sauf qu'on a $\left(\frac{5}{2}x\right)$ à la place de x.
C'est valable car $x \to 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x \to 0$.

$$\frac{1}{2+5x} = \frac{1}{2} \times \left[1 - \left(\frac{5}{2}x\right) + \left(\frac{5}{2}x\right)^2 + o\left(\left(\frac{5}{2}x\right)^2\right)\right]$$

$$=$$

Composition

Comment calculer le développement limité de $f(x) = \dfrac{1}{2+5x}$?

- On peut calculer les dérivées et en déduire les $f^{(n)}(0)$... **c'est long**.
- On peut chercher à faire apparaître une forme connue. Par exemple à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{2+5x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{5}{2}x}$$

On reconnaît la forme $\frac{1}{1+x}$ sauf qu'on a $\left(\frac{5}{2}x\right)$ à la place de x.
C'est valable car $x \to 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x \to 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+5x} &= \frac{1}{2} \times \left[1 - \left(\frac{5}{2}x\right) + \left(\frac{5}{2}x\right)^2 + o\left(\left(\frac{5}{2}x\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{25}{8}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

Exercices

Calculez les développements à l'ordre 2 de :

1. $(1+x)\cos(x)$
2. $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$
3. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ *Il s'agit de **sinus cardinal**, importante en traitement du signal. Remarquez que le terme d'ordre 1 est nul.*

Exemple d'utilisation

Supposons qu'on ait réglé le gain d'un circuit à $G = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

On sait que $R_2 = 9\ k\Omega$ mais $R_1 = 1\ k\Omega \pm 1\ \%$.

1. Que vaut G si R_1 est exactement $1\ k\Omega$?
2. Quel est le pourcentage d'erreur de G (tenant compte du pourcentage d'erreur de R_1)

Exemple d'utilisation

Supposons qu'on ait réglé le gain d'un circuit à $G = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

On sait que $R_2 = 9\ k\Omega$ mais $R_1 = 1\ k\Omega \pm 1\ \%$.

1. Que vaut G si R_1 est exactement $1\ k\Omega$?
2. Quel est le pourcentage d'erreur de G (tenant compte du pourcentage d'erreur de R_1)

1. $G = \dfrac{1\ k}{1\ k + 9\ k} = \dfrac{1}{10}$

Exemple d'utilisation

Supposons qu'on ait réglé le gain d'un circuit à $G = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$.

On sait que $R_2 = 9\ k\Omega$ mais $R_1 = 1\ k\Omega \pm 1\ \%$.

1. Que vaut G si R_1 est exactement $1\ k\Omega$?
2. Quel est le pourcentage d'erreur de G (tenant compte du pourcentage d'erreur de R_1)

1. $G = \dfrac{1\ k}{1\ k + 9\ k} = \dfrac{1}{10}$
2. On peut dire que $R_1 = 1 + x$, exprimé en $k\Omega$ et $x < 1\ \%$.

$$G(x) = \frac{1+x}{(1+x)+9} \Rightarrow G(x) \simeq \frac{1}{10} \times \left(1 + \frac{9}{10}x\right)$$

Donc G est à $0,9\ \%$ près.