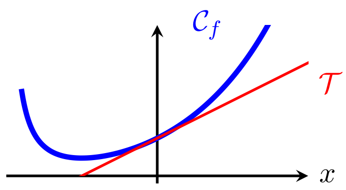

La dérivée est liée à la notion de tangente :
On approxime une courbe $\mathcal{C}_f$ par sa tangente $\mathcal{T}$.
Autrement dit, on approxime, **localement**, une fonction f par une fonction affine :

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Dans le cadre de cette fiche, l'approximation a toujours lieu en $a = 0$.
De plus, on garde l'idée que l'approximation est valable si $x \to 0$ autrement dit, pour x **assez petit**.
Pour une approximation au degré 1 = ordre 1, on a :

$$f(x) \simeq a_0 + a_1 \cdot x, \quad \text{avec } a_0 = f(0) \text{ et } a_1 = f'(0)$$

Généralisation

On dit que f admet un **développement limité** en 0 d'**ordre** n si :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + x^n \varepsilon(x) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Il faut comprendre que, quand $x \to 0$, ε devient négligeable.
À l'ordre n, le terme $x^n\varepsilon(x)$ peut être négligé $\Rightarrow f(x) \simeq a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$

Vocabulaire - Notation

- Le terme en x^n est le terme d'ordre n.
- On note aussi $o(x^n)$ pour désigner $x^n\varepsilon(x)$.
- Il faut se rappeler que quand $x \to 0$, un terme d'ordre n devient négligeable devant un terme d'ordre inférieur : $100x^3$ devient négligeable devant $2x^2$, par exemple.
- $o(x^n)$ est négligeable par rapport aux termes d'ordre $\leqslant n$.

On a déjà dit que $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$. On peut généraliser.
Si f est dérivable n fois, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième, et alors : $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Formules à connaître

$\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + o(x^n)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + o(x^n)$	$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + o(x^n)$
$\cos(x) = 1 + -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^n)$	$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^n)$

Trouver un développement

- On peut calculer les dérivées $f^{(n)}(0)$.
- On décompose en tenant compte de l'ordre :
  Inutile de conserver un terme en x^3 ou x^4 dans un développement à l'ordre 2.
  Exemple à l'ordre 2 **:**

$$\frac{\cos(x)}{1+x} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)(1 - x + x^2) + o(x^2) = 1 - x + x^2 - \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{2}} - \cancel{\frac{x^4}{2}} + o(x^2)$$