1 Présentation du problème

Dans une ville, on fait en sorte de développer le covoiturage. Les conducteurs (ceux qui possèdent une voiture) indiquent sur un site internet qu'ils ont de la place. D'autres, les passagers, s'inscrivent pour en profiter. Pour récompenser les conducteurs qui participent, la ville a mis en place un système de points qui peuvent être convertis en réductions d'impôts. Les conducteurs cherchent donc à emmener un maximum de passagers. Malheureusement, il arrive assez régulièrement qu'un passager inscrit ne se présente pas.

La question est la suivante : Un conducteur a-t-il intérêt à annoncer plus de place qu'il n'en a réellement pour être sûr de remplir sa voiture et ainsi maximiser ses points ?

2 Simulation

Pour répondre à cette question, on va faire une simulation à l'aide d'un tableur. On se place dans le cas d'un conducteur disposant réellement de 4 places mais qui choisit d'annoncer qu'il en a 5. On fait comme si à chaque fois, 5 passagers s'inscrivent. On sait que les passagers inscrits ne se présentent que dans 6 cas sur 10.

1. L'expérience revient à un schéma de Bernoulli. Complétez :
   Épreuve élémentaire : Le conducteur propose une place

   Succès : ....

   Probabilité du succès : $p =$ ....

   Nombre de répétitions : $n =$ ....
2. Ouvrez le fichier du TP. On a indiqué dans la case **B2** la probabilité p.
3. **Simulation d'une épreuve :** Dans la case **C6**, entrez la formule suivante :
   « `=ENT(ALEA()+$B$2)` »
   La fonction ALEA() produit un nombre aléatoire sur l'intervalle $[0;1[$. *La formule proposée donne* 1 *avec la probabilité* p *et* 0 *sinon.*

   Indiquez les résultats possibles et leur signification :

   ....
4. En utilisant la poignée, étendez la formule aux 5 inscrits. Puis dans la case H6, utilisez la fonction SOMME pour obtenir la somme des valeurs de **C6** à **G6**. Que représente le résultat obtenu ? ....

   ....

Attention : La suite peut être source de confusion.
- Vous venez de simulez une expérience aléatoire qui est présentée comme un schéma de Bernoulli. Ce schéma peut être vu comme la répétition de 5 épreuves élémentaires.
- On s'intéresse au nombre de succès, à la probabilité des différents résultats possibles : 0, 1, ... 5.
- Mais rappelez-vous : une probabilité, c'est l'idée d'une fréquence quand on répète un grand nombre de fois l'expérience. On va donc devoir répéter un grand nombre de fois cette expérience, faire des calculs statistiques de fréquences, de moyenne, d'écart-type.

5. Sélectionnez les cases **B6** à **H6** puis avec la poignée, recopiez cette première ligne jusqu'à atteindre le jour n° 5 000.
6. On souhaite faire le bilan pour ces 5 000 jours : On veut savoir combien de jours il n'y a eu aucun présent ; combien de jours il n'y a eu qu'un présent ; etc.
   Dans la case **K6**, entrez la formule « `=NB.SI($H$6:$H$5005;K5)` ». Avec la poignée, étendez cette formule aux cases **L6** à **P6**.

7. Indiquez les formules à placer en **Q6** et **K7**.

   Q6 = ... **K7** = ...
   Étendez **K7** aux cellules **L7** à **P7**.

8. En **K9** et **K10**, entrez la formule permettant de calculer la moyenne et l'écart-type pour ces 5 000 jours.

   K9 = ... **K10** = ...

9. Les résultats obtenus sont aléatoires et on pourrait croire qu'ils sont imprévisibles. On va utiliser la loi binomiale pour montrer qu'ils sont néanmoins prévisibles, dans une certaine mesure.

   Dans la case **K8**, entrez la formule « `=LOI.BINOMIALE(K5;5;$B$2;0)` ». Étendez la formule aux cases **L8** à **P8**. *Cette formule correspond à un calcul de* $p(X = k)$.

   Maintenant que tous les calculs sont terminés, complétez le tableau suivant. Remarquez comme les lignes « Fréquences » et « Binomiale » se correspondent.

Inscrits présents	0	1	2	3	4	5	Total
Effectifs							
Fréquences							
Binomiale							

   $\overline{x} =$ .... $E(X) = n \times p =$ ....

   $\sigma \simeq$ .... $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} \simeq$ ....

10. a) Quelle est la probabilité que le conducteur doive refuser un passager ?

    ....

    b) Supposons que le conducteur gagne 10 points chaque fois qu'il transporte un passager (20 points pour 2 passagers...) Quel est l'espérance de gain du conducteur à chaque voyage ?

    ....

    c) Quelle serait son espérance de gain s'il ne proposait que 4 places ?

    ....
    ....

    d) Ces calculs montrent que le conducteur a intérêt à proposé 5 places même si parfois il laisse quelqu'un sur le côté. Pour éviter ce problème, la mairie devrait infligé un malus aux conducteurs chaque fois qu'ils laissent un passager sur le côté. De combien doit être ce malus pour être dissuasif ?

    ....
    ....
    ....

11. Sur le **deuxième onglet du document tableur**, on a préparé une situation identique : une compagnie aérienne dispose d'avions de 134 places. Les voyageurs réservent leurs places. On sait qu'un voyageur qui a réservé a une probabilité de $0,9$ de venir. Sachant cela, la compagnie décide de proposer 140 réservations.

    On a fait une simulation pour 500 vols. On a compté le nombre de voyageur présents à chaque fois. Les résultats sont rappelés tout à droite du document tableur.