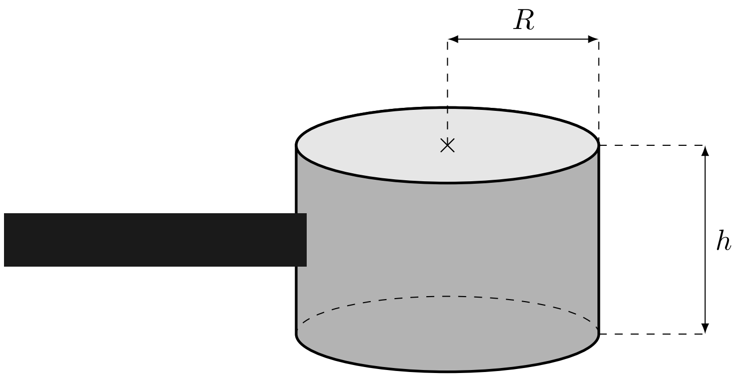
I. Présentation

On souhaite réaliser une casserole en acier. La casserole est un cylindre dont on connaît le volume V. Le but de l'exercice est de déterminer les dimensions R (Rayon) et h (hauteur) pour faire en sorte d'utiliser le moins d'acier possible. L'acier est utilisé sous forme d'une tôle d'épaisseur constante donc cela revient à utiliser une **surface minimum** de tôle d'acier.

Le manche de la casserole est là pour l'illustration. On ne s'en occupera pas.



La casserole est constituée de la partie latérale d'un cylindre de hauteur h et rayon R, dont l'aire est $2\pi\,R\,h$, et de la partie inférieure d'aire πR^2. Il n'y a pas de couvercle.

On vous donne donc les deux formules :

$$V = \pi R^2 h \quad \text{et} \quad S = 2\pi\,R\,h + \pi R^2$$

On veut, pour V donné, choisir h et R pour rendre S minimum.

II. $V = 6\,\mathrm{L}$

1. On veut s'exprimer en cm. Donnez V en cm^3.
2. Considérant l'expression de V et la valeur de V, exprimez h en fonction de R.
3. Remplacez h par son expression dans S. Montrez que :

$$S = \frac{12000}{R} + \pi R^2 \quad (\text{en } cm^2)$$

4. À votre avis, dans quel intervalle de R devrait-on chercher ?
   Par exemple, il est peu crédible qu'une casserole de $6\,\mathrm{L}$ *ait* $100\,\mathrm{cm}$ *de rayon !*
5. Tracez la courbe de S avec R en abscisse.
6. Répondez à la question : donnez R par lecture graphique puis déduisez-en h.
7. Qu'observe-t-on concernant les valeurs de R et h ?

III. V connu mais pas précisé

On veut raisonner en général : on veut trouver une formule qui donne directement R et h en fonction de V. Cela permettra notamment de savoir si la remarque quant aux valeurs de R et h est valable pour tous les volumes. Nous devons donc raisonner comme si connaissions V mais sans pouvoir remplacer V par un nombre.

1. Exprimez h en fonction de R et V
2. En remplaçant h dans la formule de S, montrez que

$$S = \frac{2V}{R} + \pi R^2$$

3. Vérifiez l'homogénéité de la formule.
4. Il s'agit de trouver le R qui rend S minimum pour V fixé.
   a) Calculez $S'(R)$, dérivée de S,
   b) faites l'étude de signe de S' et tracez le tableau de variation,
   c) répondez à la question en donnant R en fonction de V,
   d) vérifiez l'homogénéité,
   e) déterminez la valeur de h correspondant,
   f) comparez h et R.

   Pensez à vérifier que la formule donne bien le résultat de la partie précédente pour $V = 6\,\mathrm{L}$.

IV. Des surfaces minimales et maximales

La situation décrite dans ce TD est courante en physique :

- partant d'un volume ou d'une quantité de matière donnée, la surface extérieure est réduite au minimum,
- ou bien la surface est augmenté aussi grande que possible,
- ou encore c'est la surface qui est fixée et le volume que l'on rend soit maximum, soit minimum.

Donnez des exemples de situations physiques relevant de ces problématiques.