

1 Présentation

Un filtre de **Butterworth** est un filtre conçu pour avoir un gain le plus constant possible dans la bande passante et une coupure à l'ordre voulu.

Plaçons-nous dans le cas d'un filtre passe bas, la forme de gain attendue est :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

où n est l'ordre.

- 1) Pour $\omega \ll \omega_c$, donnez une estimation de G_{dB} .
- 2) Pour $\omega \gg \omega_c$, donnez une estimation de G_{dB} .
- 3) Dans la partie coupée, combien perd-on de dB par décade?

2 Exemple de situation

On souhaite transmettre un signal dont la bande de fréquence utile va de 0 Hz à 10 kHz. Dans cette bande, l'atténuation ne devrait pas être inférieure à $-0,2$ dB.

En termes de calculs, cela signifie que $G_{dB}(2\pi \times 10k) > -0,2$

On souhaite supprimer les hautes fréquences à partir de 200 kHz. On voudrait que dans la bande coupée, l'atténuation soit au moins de 70 dB.

En termes de calculs, cela signifie que $G_{dB}(2\pi \times 200k) < -70$

- 1) Quel ordre choisir ?
- 2) Que choisir pour ω_c ?

3 Coefficients du filtre et réalisation

On peut trouver les coefficients utiles sur internet, par exemple sur Wikipedia. On y apprend qu'un filtre de Butterworth aura une fonction de transfert complexe de forme : $H(j\omega) = \frac{1}{B_n(s)}$ où s est un raccourci pour $j\frac{\omega}{\omega_c}$.

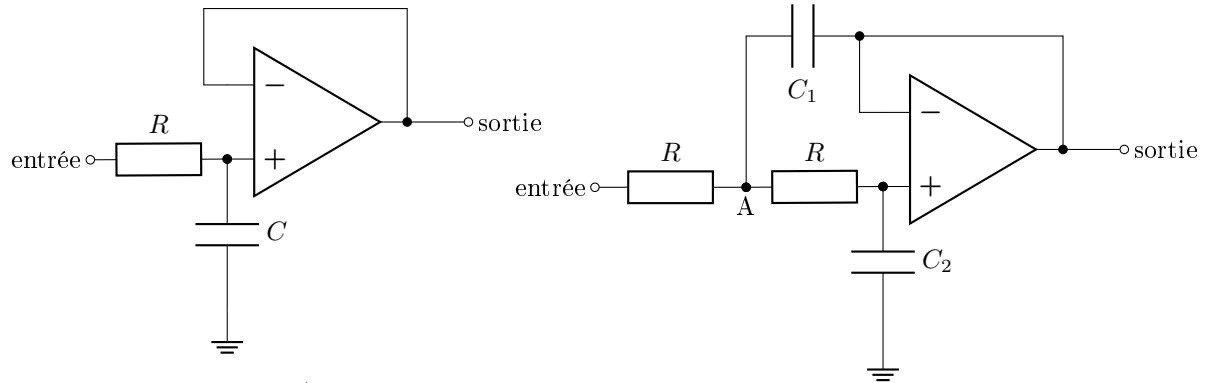
ordre n	$B_n(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$

Cela signifie que, par exemple pour réaliser un filtre d'ordre 4, il faudra réaliser la cascade de deux filtres d'ordre 2 ci-dessous :



La succession de ces deux filtres d'ordre 2 permettra d'obtenir un filtre d'ordre 4 avec exactement le gain $G(\omega)$ désiré (celui donné au tout début)

Ensuite, pour réaliser un étage du filtre, il existe différentes possibilités. Nous pouvons par exemple utiliser la structure de **Sallen-key**.



Ordre 1 : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

Ordre 2 : $H(j\omega) = ???$

1) Trouvons d'abord la fonction de transfert pour l'ordre 2 :

a) On sait que $V^+ = V^- = V_s$.

En utilisant le théorème de Millman, déterminez V_A en fonction de V_{in} , V_s , ω et des composants.

b) Exprimez V^+ en fonction de V_A , ω et des composants.

c) Déduisez-en l'expression de $H(j\omega)$

Le calcul est un peu laborieux et le résultat peut se trouver sur internet. Si ce calcul est trop long, on pourra utiliser la solution donnée en fin de document

2) Choisissez les structures utiles et les composants.

Dans les deux cas, ordre 1 ou 2, vous disposez d'une liberté de choix, les composants ne sont pas entièrement déterminés.

3) Dessinez l'ensemble du filtre.

4 Limites

Supposons que l'on reprenne les données précédente : on veut que la bande passante aille jusque 10 kHz. En revanche, on veut atténuer de 100 dB les fréquence à partir de 20 kHz. C'est donc une coupure beaucoup plus nette.

À votre avis, qu'est ce qui empêche de réaliser un tel filtrage?

La fonction de transfert du filtre d'ordre 2 est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2RC_2 j\omega + R^2C_1C_2(j\omega)^2}$$