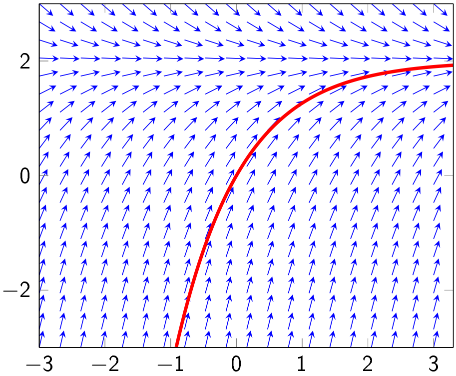
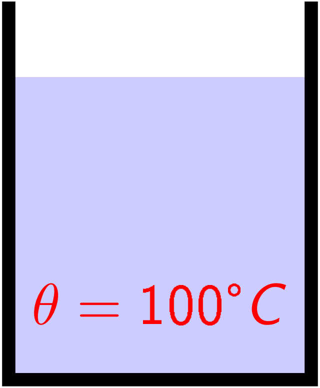


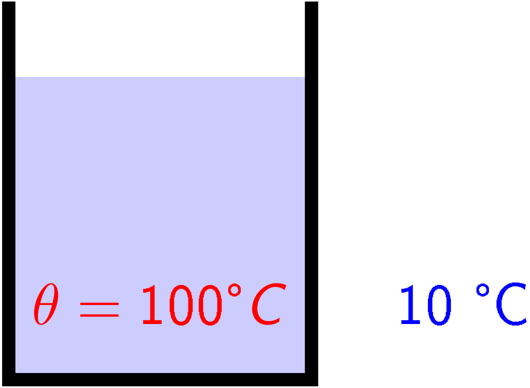
Équations différentielles – Introduction

I. Expérience

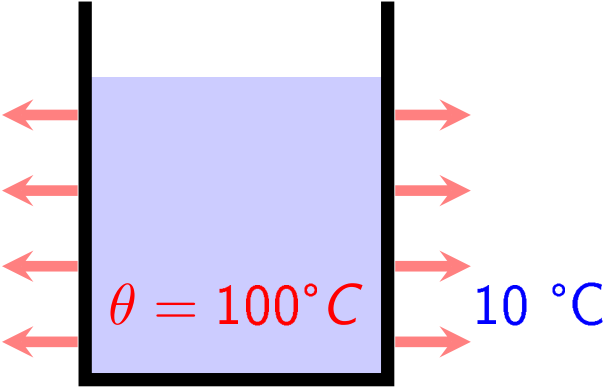
Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.



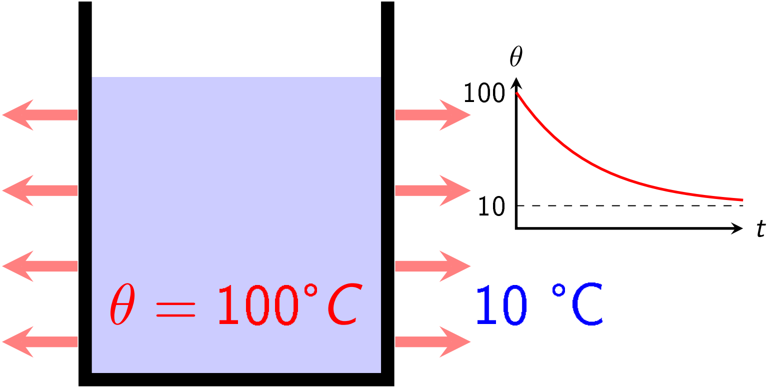
Un verre contient de l'eau à $\theta = 100^{\circ}C$.
L'air ambiant est à $10^{\circ}C$.



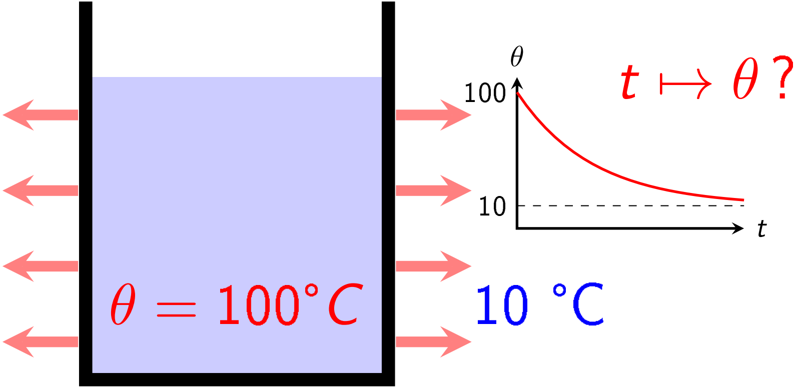
Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.



Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.
La température θ va baisser jusqu'à $10°C$.



Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.
La température θ va baisser jusqu'à $10°C$.



II. Modélisation

Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \rightsquigarrow t+dt} \theta + d\theta$$

Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \rightsquigarrow t+dt} \theta + d\theta$$

En première approximation $d\theta \propto$:

- le temps dt,
- la différence $\theta - 10$
  ie : Plus est grand l'écart de température entre l'eau et l'air ambiant, plus l'échange d'énergie est grand.

Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \rightsquigarrow t+dt} \theta + d\theta$$

En première approximation $d\theta \propto$:

- le temps dt,
- la différence $\theta - 10$
  ie : Plus est grand l'écart de température entre l'eau et l'air ambiant, plus l'échange d'énergie est grand.

On va supposer :

$$d\theta = -0,05 \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

- Signe $-$ car on s'attend à $\theta \searrow$,
- $0,05$ est le facteur proportionnalité qui dépend sûrement de la matière du verre, son épaisseur, sa forme... et aussi des unités choisies !
  $0,05$ est un exemple.

III. Équation différentielle

De la modélisation :

$$d\theta = -0,05 \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

De la modélisation :

$$d\theta = -0,05 \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

On déduit :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

C'est une **équation différentielle** : une équation dont

- l'inconnue est une fonction θ
- l'inconnue apparaît avec ses dérivées θ', θ''...

Le physicien ne note pas la dépendance en temps $\theta(t)$.
Il sait que θ dépend de t mais ne l'écrit pas pour alléger.

IV. Exploitation du modèle

On sait que $\theta(0) = 100$ et que $(E)\ :\ \theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?
Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'

On sait que $\theta(0) = 100$ et que (E) : $\theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?
Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'
- Je me fixe un dt petit, et je calcule $d\theta = \theta' \cdot dt$

On sait que $\theta(0) = 100$ et que (E) : $\theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?

Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'
- Je me fixe un dt petit, et je calcule $d\theta = \theta' \cdot dt$

Revient à faire comme si θ' était constant pendant le temps dt, comme pour une fonction affine, c'est à dire une fonction du premier ordre. C'est pour cela qu'on parle d'ordre 1.

On sait que $\theta(0) = 100$ et que $(E)\ :\ \theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?

Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'
- Je me fixe un dt petit, et je calcule $d\theta = \theta' \cdot dt$

Revient à faire comme si θ' était constant pendant le temps dt, comme pour une fonction affine, c'est à dire une fonction du premier ordre. C'est pour cela qu'on parle d'ordre 1.

- Je calcule la nouvelle valeur $\theta + d\theta$

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	0
θ	100
θ'	
$d\theta$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	0
θ	100
θ'	$\overset{(E)\downarrow}{-4,50}$
$d\theta$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	$0 \xrightarrow{dt}$	$0,1$
θ	100	
θ'	$(E)\downarrow$ $-4,50$	
$d\theta$	$dt \cdot \theta' \downarrow$ $-0,45$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	0	$\xrightarrow{dt}$	$0,1$
θ	100	$\longrightarrow$	$99,55$
	$(E)\downarrow$		
θ'	$-4,50$		
	$dt \cdot \theta' \downarrow$		
$d\theta$	$-0,45$		

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	$0 \xrightarrow{dt}$	$0,1$	$0,2$
θ	$100 \longrightarrow$	$99,55$	$99,10$
θ'	$(E)\downarrow$ $-4,50$	$-4,48$	
$d\theta$	$dt\cdot\theta'\downarrow$ $-0,45$	$-0,45$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	$0 \xrightarrow{dt}$	$0,1$	$0,2$	$0,2$
θ	$100 \longrightarrow$	$99,55$	$99,10$	$98,67$
θ'	$(E)\downarrow$ $-4,50$	$-4,48$	$-4,46$	$\bullet\ \bullet\ \bullet$
$d\theta$	$dt \cdot \theta'\downarrow$ $-0,45$	$-0,45$	$-0,45$	

Voir exercice 1

Le passage $\dfrac{d\theta}{dt} \to \theta'$ est juste dans la limite où $dt \to 0$. Notre calcul avec $dt = 0,1$ est donc approximatif.

On peut améliorer l'approximation en réduisant dt, mais cela augmente le temps de calcul.

Dans des cas **assez simples**, on peut trouver une expression théorique exacte de $\theta(t)$.

V. Solution exacte

Notre problème est de résoudre :

$$\begin{cases} (E) : \theta' = -0,05(\theta - 10) \\ \text{avec } \theta(0) = 100 \end{cases}$$

C'est à dire de trouver une fonction θ qui vérifie à la fois l'équation et la condition initiale.

Nous avons utilisé une méthode numérique pour trouver une **approximation** de la solution. Nous aimerions trouver la solution **exacte**.

Notre problème est de résoudre :

$$\begin{cases} (E) : \theta' = -0,05(\theta - 10) \\ \text{avec } \theta(0) = 100 \end{cases}$$

C'est à dire de trouver une fonction θ qui vérifie à la fois l'équation et la condition initiale.

Nous avons utilisé une méthode numérique pour trouver une **approximation** de la solution. Nous aimerions trouver la solution **exacte**.

La solution exacte est :

$$\theta = 10 + 90\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}$$

En effet on a d'une part : $\theta' = -0,05 \times 90\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}$ et d'autre part $-0,05(\theta - 10) = -0,05 \times 90\mathrm{e}^{-0{,}05\,t}$, donc (E) est bien vérifiée.

De plus, on a bien $\theta(0) = 10 + 90\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0} = 100$, donc la condition initiale est vérifiée aussi.

Nous verrons bientôt comment trouver cette solution.

Comparaisons simulation (Euler) et résolution