Propagation d'incertitudes

Dans ce TD on veut mettre en évidence des phénomènes de propagation d'incertitude. Commençons par importer toutes les bibliothèques et fonctions utiles :

```
from random import random, seed, gauss
import numpy as np
seed(45)
```

Cas à une variable

On se place dans le cas où $y = f(x)$ et où x est connu avec une incertitude.

À titre d'exemple, on prendra $f(x) = 3x^2$ et $x = 5 \pm 0,1$.
On supposera que x est réparti **uniformément**, c'est à dire que la valeur $x = 4,9$ est aussi probable que la valeur $x = 5$.

Comme x est aléatoire, y l'est également.

Probabilités ou statistiques ?

Quand on écrit X, on est dans le domaine des probabilités. On parle alors des valeurs que pourrait prendre x avant même d'avoir fait la moindre expérience. Les probabilités sont là pour faire des prédiction sur ce qui pourrait arriver.

Si on écrit x, on parle alors de résultats qui se sont effectivement produits et que l'on constate. On peut alors faire des statistiques.

L'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ servent à prédire les valeurs que l'on devrait obtenir si on calcule la moyenne $\overline{x}$ t l'écart-type σ_x (en version statistique)

Dans ce TD, nous allons faire l'expérience avec Python de sorte que nous obtiendrons des résultats statistiques. Nous vérifierons ensuite si ces résultats correspondent aux prédictions que les probabilités nous auraient permis de faire.

Simulation des valeurs de x

```
N = 10000

def tirage(reference, incertitude):
    """
    reference: valeur de référence. Exemple 5
    incertitude: marge d'erreur. Exemple 0.1
    """
    return reference + (2*random()-1)*incertutude

x_values = [tirage(5, 0.1) for i in range(N)]
```

Ce morceau de code nous permet de simuler une série de `N` valeurs de x. On peut constater avec les consoles les paramètres statistiques obtenus. Vous pourrez comparer avec les valeurs prévisibles.

```
>>> np.mean(x_values)
>>> np.std(x_values)
>>> 0.2/np.sqrt(12)]
```

$\overline{x} \approx$ .... $\sigma_x \approx$ ....

$E(X) =$ .... $\sigma(X) \approx$ ....

Simulation des valeurs de y

```
def f(x):
    return 3*x**2
y_values = [f(x) for x in x_values]
```

Ce morceau de code nous permet de calculer la série de N valeurs de y correspondant aux x.

```
>>> np.mean(y_values)
>>> np.std(y_values)
>>> np.std(y_values) / np.std(x_values)
```

$\overline{y} \approx$.......................... $\sigma_y \approx$ .... $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \approx$ ....

$E(Y) =$ .... $\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \approx \left|f'(\overline{X})\right| \approx$ ....

Représentation graphique

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
plt.hist(y_values, bins=20, density = True, edgecolor='black')
plt.show()
```

Vous constatez que la répartition de y est à peu près uniforme. Ce ne serait plus le cas si l'incertitude de x venait à augmenter.

Cas gaussien

On peut recommencer en prenant :

```
x_values = [gauss(5,0.05) for i in range(N)]
```

Cela correspond à $x = 5 \pm 0,1$ mais cette fois, l'intervalle $[4,9\,;5,1]$ n'est plus un intervalle indépassable. C'est seulement un intervalle de fluctuation à 95 %.
Faites la simulation est calculez :
$\overline{y} \approx$ .... $\sigma_y \approx$ ....
Vous constatez que y est lui aussi gaussien et donc l'intervalle de fluctuation à 95 % de y sera à peu près : $[\overline{y} - 2\sigma_y\,; \overline{y} + 2\sigma y$. Déduisez-en l'écriture sous forme $y = \text{nominal} \pm \text{incertitude}$.
$y =$ .... Vous constatez que l'on a encore $\text{incertitude}_y \approx f'(\overline{X}) \cdot \text{incertitude}_x$.

Deux variables

On veut modifier le programme pour que $y = f(x_1, x_2) = 3\,x_1^2 + 2\,x_2$.
On aura maintenant $x_1 = 5 \pm 0,1$ et $x_2 = 7 \pm 0,2$. Faites les calculs :

$\overline{x_1} \approx$ .... $\sigma_{x_1} \approx$ .... $\overline{x_2} \approx$ .... $\sigma_{x_2} \approx$ ....

$\overline{y} \approx$................ $\sigma_y \approx$ .... $\frac{\partial f}{\partial x_1}(5;7) =$................ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(5,7) =$ ....

Faites le calcul : $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2} \approx$..

En observant la répartition de Y, vous devez voir que cela ne ressemble pas beaucoup à une gaussienne. On peut trouver cela normal puisque X_1 et X_2 ne sont pas gaussiens. Pourtant, quand une variable comme Y dépend de plusieurs autres, même si ces autres ne sont pas gaussiennes, alors elle tend à devenir gaussienne. Ici, le poids de x_2 dans l'incertitude est assez faible. Vous pouvez recommencer en prenant $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 15x_2$. Vous verrez qu'alors Y se rapproche d'une gaussienne.