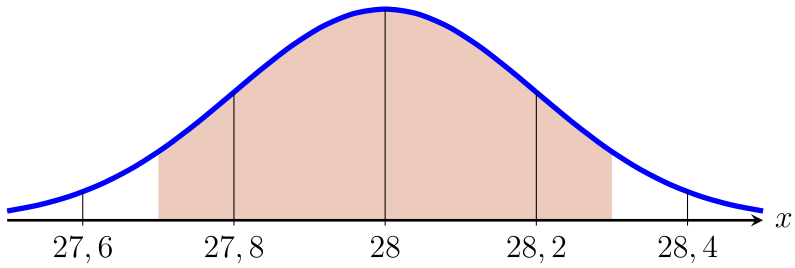
I. Cas direct

Dans la plupart des exercices, on vous dit quelque chose comme
« X suit la **loi normale** de paramètres $\mu = 28$ et d'écart-type $\sigma = 0,2$, calculez la probabilité $p(27,7 \leqslant X \leqslant 28,3)$ »

Dans ce cas, le calcul est très simple. Il suffit d'utiliser une calculatrice qui permet directement de régler μ et σ à la valeur voulue et de faire le calcul.

$$p(27,7 \leqslant X \leqslant 28,3) \approx 0,8664$$

On pourrait se représenter cette probabilité par un graphique.



Il est très important de comprendre ce graphique. En effet, en probabilité on ne fait aucun calcul compliqué mais on peut vite s'embrouiller dans les calculs à faire. Avoir une bonne image de ce que l'on calcul peut aider.

II. Calcul inverse

Il peut arriver que l'on se pose la question dans l'autre sens. Disons par exemple :
« X suit une loi normale de paramètres $\mu = 28$ et σ inconnu.
On veut que $p(27,7 \leqslant X \leqslant 28,3) = 0,99$. Que doit valoir σ ? »

II..1 Première approche : à tâtons

Dans le graphique du dessus, la zone colorée a une aire de $\approx 0,87$. Maintenant, on voudrait que la même aire délimitée par $27,3 \leqslant X \leqslant 28,3$ soit de $0,99$. On veut donc que cette aire augmente.

L'aire totale est toujours de 100 %, il faut donc que l'aire non colorée diminue.

Il faut donc que la gaussienne se « resserre ». Donc σ doit diminuer par rapport au cas précédent. Cela nous donne donc une idée pour les valeurs de σ à tester. Autrement on fait le calcul avec diverses valeur de σ en cherchant celle qui fonctionnera bien.

σ	0,2	0,15	0,1	0,12	...	0,116
$p(27,3 \leqslant X \leqslant 28,3)$	0,866	0,955	0,997	0,988	...	0,990

Cela fonctionne et est simple, mais c'est fastidieux et on ne sait pas trop jusqu'où il faut aller dans notre recherche.

II..2 Changement d'échelle

Nous allons utiliser une variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

D'abord nous utilisons la linéarité de la moyenne (ou espérance)

$$\overline{Y} = \overline{\frac{1}{\sigma}(X-\mu)} = \frac{1}{\sigma}\left(\overline{X}-\mu\right) = 0$$

En effet, ici $\overline{X} = \mu$.

On pourrait remplacer par des nombres en disant $\mu = 28$ dans l'exemple présent. Beaucoup d'élèves trouveraient cela plus confortable. Mais ce serait dommage. En conservant μ on voit bien que ce raisonnement fonctionnera dans tous les cas.

$$\begin{aligned}\overline{Y^2} &= \overline{\frac{1}{\sigma^2}(X-\mu)^2}\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\overline{X^2-2\times\mu\times X+\mu^2}\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\left(\overline{X^2}-2\times\mu\times\overline{X}+\mu^2\right)\end{aligned}$$

Mais ici encore $\overline{X} = \mu$ et donc

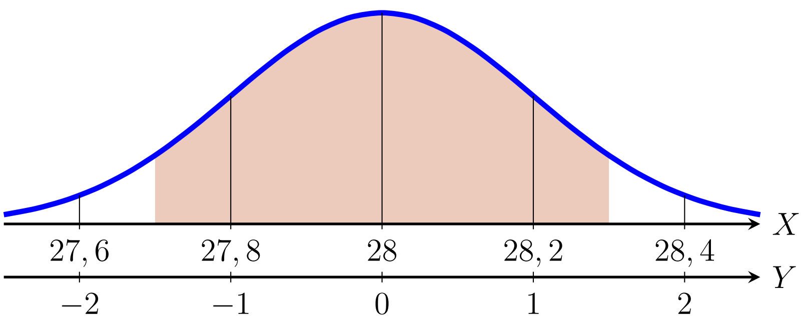
$$\begin{aligned}\overline{Y^2} &= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\left(\overline{X^2}-2\times\overline{X}^2+\overline{X}^2\right)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right)\end{aligned}$$

Et $\overline{X^2}-\overline{X}^2$ est par définition égal à σ^2 et donc $\overline{Y^2} = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2}$. On en déduit que $\sigma_Y = 1$.

Rappel, $\sigma_Y^2 = \overline{Y^2}-\overline{Y}^2$

Conclusion, la variable Y a une moyenne $\mu_Y = 0$ et un écart-type $\sigma_y = 1$. Utiliser Y revient à utiliser une mesure naturelle où l'unité est donnée par σ et où l'origine est la moyenne.

Il ne devrait pas être trop difficile de se convaincre que Y suit aussi une loi Normale. Par exemple dans le premier cas où $\mu = 28$ et $\sigma = 0,2$:



L'avantage de Y par rapport à X est que l'on sait que Y a forcément un écart-type de 1. Y suit la loi normale de référence appelée « Loi normale centrée réduite » pour laquelle $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

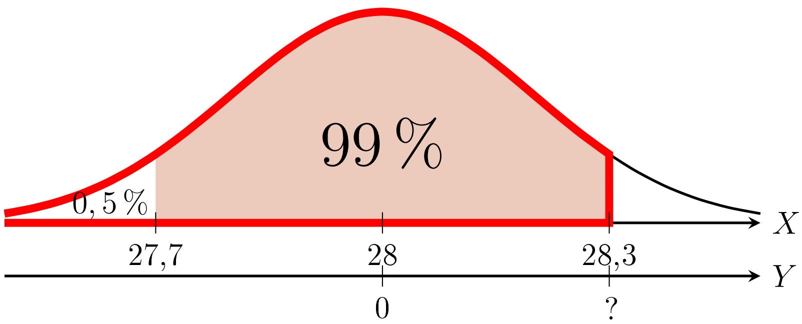
II..3 Utilisation de Y

Il n'a pas dû vous échapper que dans le problème posé, la moyenne est $\mu = 28$ et que l'on s'intéresse à $27,7 \leqslant X \leqslant 28,3$. On voit que cet intervalle est symétrique autour de la moyenne. Sans cette symétrie on ne pourrait rien faire.

On cherche donc à tracer la courbe précédente en faisant en sorte que l'aire colorée soit de 99 %.

Si nous disposions d'un tableau nous donnant directement l'aire centrale, ce serait plus simple. Mais le tableau que nous devons utiliser donne l'aire à gauche d'une certaine borne (délimitée avec le gros trait ci-dessous).

Par symétrie, on déduit que l'aire à gauche doit faire $0,5\,\%$. Donc la zone encadrée en trait fort doit avoir une aire de $99,5\,\%$.



Ici, nous voulons connaître la valeur marquée par « ? » correspondant à la borne haute de l'intervalle sur l'axe Y.

Comme on sait que Y suit la loi normale centrée réduite, on peut utiliser le tableau que je vous ai donné avec la fiche de cours et que je reproduis à la page suivante.

On cherche $0,995$ dans les aires. On trouve (j'ai encadré) les valeurs 0,9949 et 0,9951. La valeur désirée est pile au milieu. On peut lire :

- pour 0,9949, la ligne est 2,5 et la colonne est 0,07. Cela veut dire que la valeur désirée est 2,57
- pour 0,9951, idem et on trouve 2,58
- puisque l'on veut la valeur au milieu, ce sera 2,575

Conclusion, la valeur désirée pour « ? » est 2,575.

II..4 Retour à X

- La borne haute de l'intervalle recherché est pour X : 28,3.
- Cette même borne est pour Y : 2,575
- On sait que $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ et $\mu = 28$. σ est ce que l'on cherche.

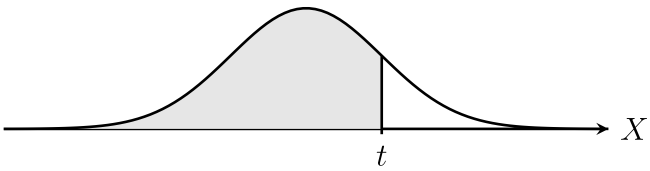
Si on remplace dans le cas de la borne haute

$$2,575 = \frac{28,3-28}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{28,3-28}{2,575} \approx 0,1165$$

En résumé : La zone demandée pour X est $[27,7\,;28,3]$, c'est à dire symétrique $\pm 0,3$ autour de la moyenne $\mu = 28$. On voudrait une aire de $99\,\%$ sur cet intervalle. Avec le tableau de la loi normale centrée réduite, on trouve que la valeur correspondante est 2,575. On comprend donc que $0,3 = 2,575\sigma$ et on conclut.

Formulaire : Valeurs de $\Pi(t)$, pour X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$



Remarque : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	$\boxed{0.9949}$	$\boxed{0.9951}$	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000