TL = Transformation de Laplace

1 Qu'est ce que c'est

1.1 La définition

C'est une opération qui part d'une fonction $f(t)$ et qui produit une nouvelle fonction $F(p)$.

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\quad \text{TL} \quad} \longrightarrow F(p)$$

La formule est donnée par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t$$

La formule n'a pas tellement d'importance pour les usages que des techniciens seraient susceptibles de faire de la TL.

1.2 Produit scalaire

L'intégrale sert ici de **produit scalaire**. Je fait ici un petit écart pour ceux qui savent ce qu'est un produit scalaire. Si vous ne connaissez pas, vous pouvez sauter à la suite.

Supposons que je sois dans un repère avec des vecteur $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ et que j'ai un vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Le produit scalaire est une sorte de multiplication entre vecteurs qui produit un nombre. On aura par exemple $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Le produit scalaire permet alors d'obtenir facilement la composante de $\vec{u}$ selon un axe.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{i} &= \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}\right) \cdot \vec{i} \\
&= 3\vec{i} \cdot \vec{i} - 2\vec{j} \cdot \vec{i} + 5\vec{k} \cdot \vec{i} \\
&= 3 \times 1 - 2 \times 0 + 5 \times 0 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Faire « scalaire $\vec{i}$ » permet d'obtenir la coordonnée selon $\vec{u}$.

Dans le cas de la série de Fourier, on a :

$$f(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

On peut voir cette décomposition comme une décomposition selon des vecteurs de base et les a_n et les b_n sont les coordonnées de cette décomposition. Les formules donnant les a_n et b_n sont des produits scalaires.

Dans le cas de la TL c'est la même chose mais la somme est **continue**. À la place de $\sum$, on a $\int$.

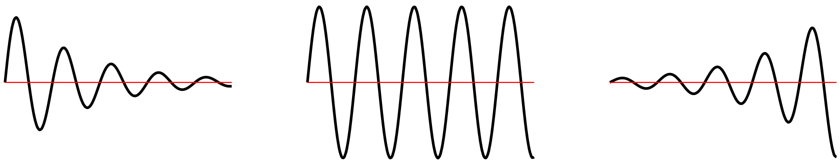
1.3 Pourquoi e^{pt}

En Fourier on envisage une fonction $f(t)$ comme un somme de sin et cos. Dans le cas de Laplace, on envisage $f(t)$ comme une somme de e^{pt}. Que représentent ces signaux ?

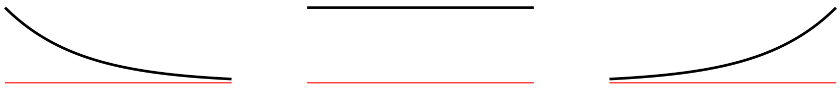
Il faut déjà signaler que p peut être complexe. donc on aura $p = a + j\omega t$.

- Le terme en $\mathrm{e}^{j\omega t}$ représentera donc une pulsation type sin ou cos (il y aura toujours dans ce cas là une paire de terme en $\mathrm{e}^{j\omega t}$ et $\mathrm{e}^{-j\omega t}$ qui a eux deux font une sinusoïde)

- Le terme en e^{at} représente une quantité qui grandit ou diminue exponentiellement, selon le signe de a.



$a < 0$, $\omega > 0$ $a = 0$, $\omega > 0$ $a > 0$, $\omega > 0$



$a < 0$, $\omega = 0$ $a = 0$, $\omega = 0$ $a > 0$, $\omega = 0$

On voit que en décomposant $f(t)$ comme une somme de e^{pt}, on envisage $f(t)$ comme une somme d'ondes qui peuvent s'amortir, se maintenir ou diverger. Cette approche nous sert donc à étudier le comportement de système automatique : restent-ils stables ? convergent-t-ils vers un équilibre ? Oscillent-ils et si oui pendant combien de temps ?

J'ai bien écrit e^{pt} et pas e^{-pt}, le $-$ dans la formule de $F(p)$ est lié au calcul du produit scalaire.

2 À quoi cela sert ?

2.1 Problème type

Nous étudions un système avec un signal en entrée et un signal en sortie.

$$e \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s$$

Le lien entre l'entrée et la sortie est donné par une **équation différentielle linéaire**

Cela pourrait être $3s'(t) + s(t) = e(t)$ par exemple, mais pas $3s'(t) + \sqrt{s(t)} = e(t)$ car $\sqrt{\ }$ n'est pas linéaire.

La TL va permettre de résoudre ce genre d'équation de façon extrêmement générale et d'avoir une très bonne compréhension des divers cas de figure envisageables.

2.2 Causalité et $U(t)$

L'équation différentielle se pose toujours comme un phénomène commençant à $t = 0$. Avant $t = 0$, il ne se passe rien : En effet, vous pouvez voir que dans la formule

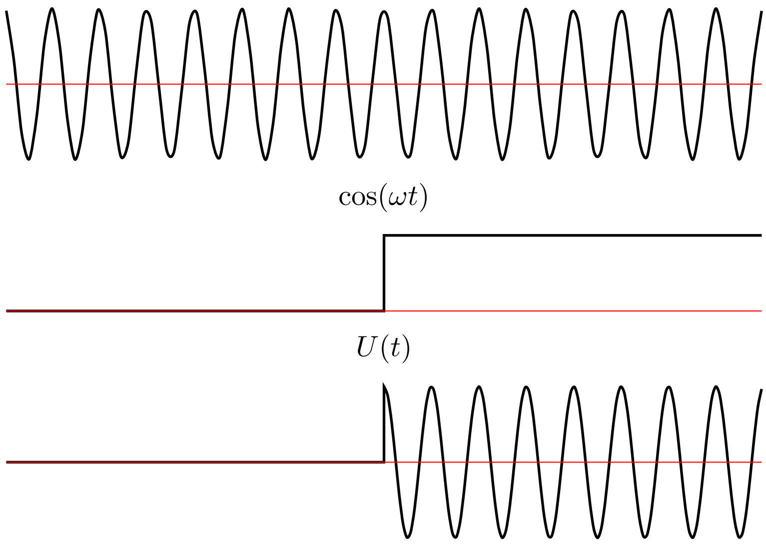
$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

On ne calcule jamais $f(t)$ pour $t < 0$. Les temps négatifs sont ignorés. Tout se passe à partir de $t = 0$. On parle de problème causal : il se passe quelque chose en $t = 0$ pour $e(t)$ et cela entraîne une réaction sur $s(t)$. Mais cette réaction est forcément dans le futur, donc pour $t > 0$.

Quand on veut être formel, on ajoute des $U(t)$ un peu partout. $U(t)$ est l'**échelon** de Heavyside. C'est la fonction :

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc si par exemple $e(t) = \cos(t)U(t)$, cela revient à ne garder que les temps positifs.



$\cos(\omega t) \cdot U(t)$

2.3 Pourquoi ça marche

On a une fonction $f(t)$. C'est sa forme normale. On dit qu'elle est dans le **domaine temporel**.

Dans le domaine temporel, calculer $f'(t)$ est compliqué. Donc résoudre les équations différentielles est difficile.

La TL fait passer $f(t) \to F(p)$. On parle de **domaine de Laplace**. C'est la même fonction mais vue d'une façon différente.

Et c'est là que tout change : quand on dérive, la TL devient $p \cdot F(p) - f(0)$. C'est assez simple, beaucoup plus simple que la dérivée dans le domaine temporel.

Conclusion : Pour résoudre l'équation différentielle, il est intéressant de

- passer dans le domaine de Laplace,
- résoudre dans le domaine de Laplace,
- revenir dans le domaine temporel

En vérité, les automaticiens, très à l'aise avec le domaine de Laplace, peuvent rester dans le domaine de Laplace car ils y trouvent directement toutes les informations dont ils ont besoin.

3 Quelques règles de calcul

3.1 Linéarité

Avant de faire un exemple, il nous faut quelques règles de calcul.

On sait d'abord que la TL est **linéaire** :

$$\left.\begin{aligned} f(t) &\overset{TL}{\to} F(p) \\ g(t) &\overset{TL}{\to} G(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(t) + g(t) \overset{TL}{\to} F(p) + G(p)$$

$$f(t) \overset{TL}{\to} F(p) \Rightarrow a \cdot f(t) \overset{TL}{\to} a \cdot F(p)$$

3.2 Formulaire

On connaît également quelques TL de fonctions de référence :

$f(t)$	$F(p)$
$U(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{-a\,t} \cdot U(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\cos(\omega t) \cdot U(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t) \cdot U(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot e^{-a\,t} \cdot U(t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t) \cdot e^{-a\,t} \cdot U(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t^n \cdot U(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Ces fonctions suffisent. On dispose en plus de formules plus générales :

$f'(t)$	$p \cdot F(p) + f(0)$
$f(t) \cdot e^{-at}$	$F(p+a)$
$f(t-a)$	$F(p) \cdot e^{-a\,p}$

3.3 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{p \to 0} p \cdot S(p) = \lim_{t \to +\infty} s(t) \quad si \lim_{t \to +\infty} s(t) \text{ existe}$$

Voyons un exemple : $S(p) = \dfrac{5}{p(4p+1)}$

$$p \cdot S(p) = \frac{5}{4p+1} \overset{p \to 0}{\to} 5$$

On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 5$.

Malheureusement, cette limite n'est pas garantie : il faut d'abord être sûr que la limite existe. Si la limite existe, elle sera de 5. C'est néanmoins utile, comme on va le voir.

4 Exemples de résolution

Donnons quelques exemples pour voir comment on utilise la TL.

4.1 Un ordre 1, second membre constant

$$4\,s'(t) + s(t) = 5 \quad ; \quad s(0) = 0$$

4.1.1 Méthode habituelle

a) On résout $4\,s'(t) + s(t) = 0$. On obtient $s_0 = K\,e^{-0{,}25t}$

b) On cherche une solution particulière. Ici on constate à l'intuition que $s_1 = 5$ est une solution.

c) On aura donc $s(t) = s_1 + s_0 = 5 + K\,e^{-0{,}25t}$

d) On sait que $s(0) = 0$ donc $5 + K\,e^0 = 0 \Rightarrow K = -5$

$$s(t) = 5 - 5\,e^{-0{,}25t}$$

4.1.2 Avec Laplace

On passe toute l'équation dans le domaine de Laplace, cela nous donne

$$4\Big(pS(p) + s(0)\Big) + S(p) = \frac{5}{p}$$

Deux remarques :

- Avec cette méthode, la condition initiale $s(0)$ est prise en compte directement.
- Quand on pose les équations différentielles en physique, souvent on ne précise pas de $U(t)$. C'est un formalisme d'automaticien.

  Le physicien va sous-entendre ou dire explicitement que l'équation est vraie pour $t > 0$. Par exemple, c'est parce que l'on ferme un interrupteur à $t = 0$ qu'il se passe quelque chose. Cela revient donc au même.

  Notez bien que quand on fait la TL du membre de droite 5, l'absence de $U(t)$ n'a pas d'importance car de toute façon, dans la formule de la TL on fait $\displaystyle\int_0^{+\infty}$. Donc tout ce passe comme si ce 5 n'existait que pour $t > 0$.

Poursuivons en remplaçant $s(0)$ et en isolant $S(p)$.

$$\begin{aligned}
4\Big(pS(p) + 0\Big) + S(p) &= \frac{5}{p} \\
\Leftrightarrow S(p)(4p+1) &= \frac{5}{p} \\
\Leftrightarrow S(p) &= \frac{5}{p\,(4p+1)}
\end{aligned}$$

On obtient donc facilement $S(p)$, c'est à dire la solution de l'équation. Mais cette solution est dans le **domaine de Laplace**, ce n'est pas encore ce que nous voulions. Il faut passer en temporel.

Pour cela, nous avons besoin d'un autre outil : la **décomposition en éléments simples**. L'idée est que l'on pourra décomposer l'expression $\dfrac{5}{p\,(4p+1)}$ en une somme dépendant des **pôles** de $S(p)$. Les pôles sont les valeurs qui annulent le **dénominateur**.

Ici le dénominateur est $p(4p+1)$.

$$p(4p+1) \Leftrightarrow p = 0 \text{ OU } 4p+1 = 0 \Leftrightarrow p = 0 \text{ OU } p + 0,25 = 0$$

Au passage vous voyez apparaître le $-0,25$ qui était présent dans la résolution précédente. C'est précisément ce genre de chose que reconnaît directement un automaticien quand il voit une formule comme $\dfrac{5}{p\,(4p+1)}$.

Nous savons maintenant que l'on pourra écrire :

$$S(p) = \frac{5}{p\,(4p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+0,25}$$

Et on doit trouver a et b.

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p+0,25} = \frac{ap + 0,25a + bp}{p(p+0,25)} \times \frac{4}{4} = \frac{4(a+b)p + a}{p(4p+1)}$$

On en déduit que $a = 5$ et $a + b = 0$ donc

$$S(p) = \frac{5}{p\,(4p+1)} = \frac{5}{p} - \frac{5}{p+0,25}$$

- Le calcul de a et b est la version Laplace de la recherche de K dans la méthode habituelle. Les deux coefficients 5 et -5 obtenus correspondent à ceux obtenus dans la méthode précédente.

Maintenant que $S(p)$ est décomposé, on reconnaît des fonctions du tableau. On sait que $\frac{5}{p}$ est la TL de $5\,U(t)$ et que $\frac{5}{p+0,25}$ est la TL de $5\,\mathrm{e}^{-0,25t}\,U(t)$. On peut donc repasser en temporel.

$$s(t) = 5\,U(t) - 5\,\mathrm{e}^{-0,25t}\,U(t)$$

Puisque nous ne nous préoccupons pas de $s(t)$ pour $t < 0$, on peut simplifier en écrivant :

$$s(t) = 5 - 5\,\mathrm{e}^{-0,25t}, \quad t \geqslant 0$$

4.1.3 Est-ce que cela en vaut la peine ?

On peut se le demander car ici la méthode habituelle semble aller beaucoup plus vite.

L'intérêt de la TL n'apparaîtra que si on envisage des situations plus complexes, si on développe la capacité à faire vite les calculs comme la décomposition en élément simple et aussi si on ne s'intéresse pas vraiment à la solution.

Par exemple ici, était-ce très utile de savoir $s(t) = 5 - 5\,\mathrm{e}^{-0,25t}$?

Peut-être que la seule chose qui nous intéresse est de savoir si le système est stable et s'il réagit vite. Mais pour savoir cela, je n'ai pas vraiment besoin de connaître l'expression de $s(t)$.

Dès que je sais $S(p) = \frac{5}{p\,(4p+1)}$, je sais que $S(p)$ a un pôle en $p = 0$ et un pôle en $p + 0,25 = 0$. Cela me suffit largement !

Il est clair ici que le pôle en $p = 0$ correspond à la réponse à l'entrée qui était en $\frac{1}{p}$. Le pôle en $p + 0,25$ est caractéristique du temps de réponse de notre système. En voyant $p + 0,25 = 0$ on sait que :

- Il y aura un terme en $\mathrm{e}^{-0,25t}$ dans la solution
- $0,25$ déterminera donc la vitesse de réaction du système : on a une constante de temps en $\tau = \frac{1}{0,25} = 4$ et on sait donc que l'ordre de grandeur du temps de réponse du système est de quelques τ (pour 95 %, c'est 3τ)
- Puisque c'est une exponentielle avec un $-$, on est certain que ce terme va s'amortir et donc que l'on a une solution qui va vers un équilibre.

  Si l'équation différentielle avait été :

  $$-4s' + s = 5$$

  On aurait eu

  $$S(p) = \frac{5}{p(-4p+1)}$$

  Et donc on aurait eu un pôle en $-4p + 1 = 0 \Rightarrow p - 0,25 = 0$. Dans ce cas là on aurait donc eu un terme exponentiel divergent.

Comme vous le voyez, $S(p)$ nous donne à peu près toute l'information utile. Il n'est le plus souvent pas nécessaire de repasser en temporel.

4.1.4 Valeur finale

Dans ce cas particulier, on voit que $pS(p) \overset{p\to 0}{\to} 5$. Est ce que cela veut dire que $s(t) \overset{t\to+\infty}{\to} 5$?

La réponse est oui et on le sait instantanément : quand on voit que que $S(p) = \frac{5}{p(4p+1)}$ on voit tout de suite qu'il n'y aura que des pôles à partie réelle positive, donc cela correspond à des exp convergente. On est certain que $s(t)$ a bien une limite et donc on sait que le théorème de la valeur finale fonctionne.

Puisque l'entrée était de 5, on en déduit donc tout de suite que la sortie converge vers l'entrée sans avoir besoin de repasser en temporel.

4.2 Un ordre 1, second membre exponentiel

$$4\,s'(t) + s(t) = 6\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} \quad ; \quad s(0) = 0$$

4.2.1 Méthode habituelle

a) On résout $4\,s'(t) + s(t) = 0$. On obtient $s_0 = K\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$

b) On cherche une solution particulière.
Là c'est un peu plus difficile. On va tenter une solution de forme $s(t) = A\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$, ce qui donne $s'(t) = -0,1A\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. On remplace dans l'équation :

$$4 \times \left(-0,1A\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right) + A\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 6\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$$

On peut tout simplifier en enlevant les $\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

$$-0,4A + A = 6 \Rightarrow A = 10$$

Donc $s_1 = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ est une solution.

c) On aura donc $s(t) = s_1 + s_0 = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + K\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$

d) On sait que $s(0) = 0$ donc $10\,\mathrm{e}^0 + K\,\mathrm{e}^0 = 0 \Rightarrow K = -10$

$$s(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 10\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$$

4.2.2 Avec Laplace

On passe toute l'équation dans le domaine de Laplace, cela nous donne

$$4\Big(pS(p) + s(0)\Big) + S(p) = \frac{6}{p+0,1}$$

En remplaçant $s(0)$ et en isolant $S(p)$.

$$S(p) = \frac{6}{(p+0,1)\,(4p+1)}$$

Si on reprend la réflexion précédente, on voit tout de suite que $S(p)$ a une composante correspondant à l'entrée (en $p + 0,1$) et une composante correspondant à la dynamique du système (en $4p + 1$) qui détermine son temps de réaction.

On sait donc déjà que $s(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t} + b \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}$ et il ne reste qu'à trouver a et b, ce qui n'est pas forcément indispensable, cela dépend de ce que l'on veut faire.

Je ne refais pas le détail de la décomposition en élément simple. Vous pouvez le faire avec **xCas** en écrivant :

```
partfrac(6/((p+0.1)*(4p+1)))
```

Et la réponse est

$$S(p) = \frac{10}{p+0,1} - \frac{10}{p+0,25}$$

Vous retrouvez ici les deux coefficients 10 et -10.

$$s(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 10\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$$

4.2.3 Valeur finale

Cette fois $pS(p) = \dfrac{6p}{(p+0,1)(4p+1)} \overset{p\to 0}{\to} 0$. Est-ce la limite de $s(t)$?

Là encore, oui.$S(p)$ a $-0,25$ et $-0,1$ comme pôles ce qui donne des exp convergente. On devine donc sans faire le moindre calcul que $s(t)$ converge et donc que le théorème de la valeur finale fonctionne.

4.3 Un ordre 1, second membre sin

$$4\,s'(t) + s(t) = 6\,\sin(2t) \quad ; \quad s(0) = 0$$

4.3.1 Méthode habituelle

a) On résout $4\,s'(t) + s(t) = 0$. On obtient $s_0 = K\,\mathrm{e}^{-0,25t}$

b) On cherche une solution particulière.

Là c'est vraiment super casse-pieds. Il faut chercher une solution de forme $A\,\sin(2t+\varphi)$. Je ne le fais pas...

$s_1 = A\,\sin(2t+\varphi)$

On peut calculer les deux coeffs A et φ mais c'est de la trigo pas marrante...

c) On aura donc $s(t) = s_1 + s_0 = A\,\sin(2t+\varphi) + K\,\mathrm{e}^{-0,25t}$

d) On sait que $s(0) = 0$ donc $A\,\sin(2t+\varphi) + K\,\mathrm{e}^{0} = 0 \Rightarrow K = -A\,\sin(\varphi)$

$$s(t) = A\,\sin(2t+\varphi) - A\,\sin(\varphi)\,\mathrm{e}^{-0,25t}$$

4.3.2 Avec Laplace

On passe toute l'équation dans le domaine de Laplace, cela nous donne

$$4\Big(pS(p) + s(0)\Big) + S(p) = \frac{6\times 2}{p^2+2^2}$$

Notez au passage que la TL permet de bien découper ce qui relève du membre gauche et ce qui relève du membre droit. Vous voyez ici que c'est à peu près toujours la même chose.

$$S(p) = \frac{12}{(p^2+4)\,(4p+1)}$$

Ici, on constate que l'on a un pôle en p^2+4, c'est à dire un pôle avec une solution complexe. C'est typique de la présence d'une ondulation.

Si on fait la décomposition en élément simple complète on aura trois termes :

$$S(p) = \frac{a}{p-2i} + \frac{b}{p+2i} + \frac{c}{p+0,25}$$

Les deux termes complexes produiront une certaine ondulation de pulsation 2, comme l'entrée. Mais comme nous nous intéressons à des signaux réels, on pourra limiter la décomposition à :

$$S(p) = \frac{ap+2\,b}{p^2+4} + \frac{c}{p+0,25}$$

Franchement, la première décomposition est meilleure car :

- les termes en $\frac{}{p\pm 2i}$ sont plus simples et donneront des $\mathrm{e}^{\pm 2it}$,
- un automaticien n'est pas gêné par la présence d'un peu de complexe,
- si on décompose en réel, on aura un terme en cos et un terme en sin et ce sera encore de la trigo que de trouver la valeur de φ. Si on fait tout en complexe, tout vient facilement.

Avec xCas, pensez à vous mettre en mode complexe, et demandez une évaluation (car les valeurs exactes n'ont absolument aucun intérêt) :

```
evalf(partfrac(12/factor((p^2+4)(4p+1))), 3 )
```

Et on obtient (le `, 3` sert à arrondir à 3 chiffres)

$$S(p) \approx \frac{-0,369+0,046\cdot i}{p+2\,i} + \frac{-0,369-0,046\cdot i}{p-2\,i} + \frac{0,738}{p+0.25}$$

On reconnaît un nombre $Z = -0,369 - 0,046\,i$. En temporel

$$s(t) \approx \overline{Z}\cdot \mathrm{e}^{-2it} + Z\cdot \mathrm{e}^{+2it} + 0,738\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}$$

On pourrait calculer $A = |Z| \approx 0,372$ et $\varphi = \arg(Z) \approx -3,018$ ce qui donnerait

$$s(t) \approx A\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\,\mathrm{e}^{-2it} + A\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\mathrm{e}^{+2it} + 0,738\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}$$

Et donc

$$s(t) \approx 2A\,\cos(2t+\varphi) + 0,738\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}$$

J'avoue que cela reste fastidieux. Encore une fois, le calcul explicite de $s(t)$ n'est en général pas utile.

4.3.3 Valeur finale

Cette fois $pS(p) = \frac{12p}{(p^2+4)(4p+1)} \overset{p\to 0}{\to} 0$.

Mais cette fois ce n'est pas la limite de $s(t)$ car $s(t)$ ne converge pas. En effet, dans ce cas $s(t)$ est une sinusoïde qui oscille sans jamais converger. Est-ce que cela est gênant ? Non, car en voyant le pôle en p^2+4 on voit tout de suite que cela correspondra à une sinusoïde non amortie.

De façon générale, les pôles peuvent toujours se factoriser et donner des termes au pire du second degré.

- Un pôle en $p+3$ par ex. donne un terme convergent,
- un pôle en $p-3$ par ex. donne un terme divergent,
- un pôle en p^2-4 par ex. est équivalent à $(p+2)(p-2)$ et contient donc un élément divergent,
- un pôle en p^2+4 par ex. correspond à une sinusoïde non amortie donc non convergente,
- un pôle en p^2+2p+8 par ex. correspond à une sinusoïde amortie donc convergente,
- un pôle en p^2-2p+8 par ex. correspond à une sinusoïde divergente.

Bref, on reconnaît facilement tous les cas et on sait d'entrée de jeu si un $S(p)$ correspond à un signal convergent ou non.

4.4 Un ordre 2, second membre constant

$$0,1\,s''(t) + 0,2s'(t) + s(t) = 5 \quad ; \quad s(0) = 0, s'(0) = 0$$

4.4.1 Méthode habituelle

a) On commence par trouver les racines de $0,1x^2 + 0,2x' + 1 = 0$.
On peut le faire avec une machine et se satisfaire de solution approximative.
On obtient : $-1+3i$ et $-1-3i$.

On sait donc que $s_0(t) = A\,\cos(3t+\varphi)\mathrm{e}{-t}$

Il faudra utiliser les conditions initiales pour connaître A et φ.

b) On cherche une solution particulière.

Ici $s_1 = 5$ est évidente.

c) On aura donc $s(t) = s_1 + s_0 = 5 + A\,\cos(3t+\varphi)\mathrm{e}{-t}$

d) $s(0) = 0$ ce qui nous donne $5 + A\cos(\varphi) = 0$
$s'(0) = 0$ ce qui nous donne $-3A\sin(\varphi) - A\cos(\varphi) = 0$

La deuxième équation nous donne $\tan(\varphi) = -\frac{1}{3}$ donc $\varphi \approx -0,32$
Ce qui donne $A = -5/\cos(\varphi) \approx -5,27$

$$s(t) = 5 - 5,27\cos(3t - 0,32)\,\mathrm{e}^{-t}$$

4.4.2 Avec Laplace

On passe toute l'équation dans le domaine de Laplace.

Il faut une étape pour trouver la TL de $s''(t)$.
- $s(t) \to S(p)$
- $s'(t) \to S_{der}(p) = pS(p) + s(0) = pS(p)$
- $s''(t) \to S_{der2}(p) = pS_{der}(p) + s'(0) = p^2 S(p)$

L'équation est donc

$$0,1p^2 S(p) + 0,2pS(p) + S(p) = \frac{5}{p}$$

$$S(p) = \frac{5}{p\,(0,1p + 0,2p + p)}$$

Vous noterez qu'ici le polynôme caractéristique apparaît naturellement.

Connaître les pôles de $S(p)$ nécessite de résoudre ce polynôme. Quand les racines du polynôme sont complexes, on aura naturellement des sin ou cos dans la solution.

$$S(p) \approx \frac{5}{p} + \frac{-2,5 - 0,833\,i}{p + 1 + 3\,i} + \frac{-2,5 + 0,833\,i}{p + 1 - 3\,i}$$

Dans les deux pôles complexe, on reconnaît clairement :
- le $+1$ qui donnera le terme e^{-t}
- les $+3i$ et $-3i$ qui donneront le terme en $\cos(3t)$
- les numérateurs en $-2,5 \pm 0,833\,i$ permettront de trouver l'amplitude et la phase

$$Z = -2,5 + 0,833\,i \Rightarrow |Z| \approx 2,635, \arg(Z) \approx 2,82$$

$$s(t) = 5 + \overline{Z}\mathrm{e}^{-t-3it} + +Z\mathrm{e}^{-t+3it}, t \geqslant 0$$

En faisant un peu de complexes :

$$s(t) = 5 + 2|Z|\,\cos(3t + \arg(Z))\,\mathrm{e}^{-t} = 5 + 5,27\,\cos(3t + 2,82)\,\mathrm{e}^{-t}, t \geqslant 0$$

On retrouve bien la même chose (la phase a changé mais $2,82 = -0,32 + \pi$ et cela se traduit par le changement $\pm$ devant le coeff $5,27$)

4.5 Et pour conclure

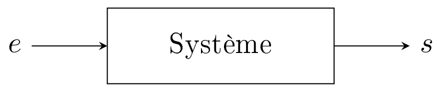
Un grand avantage de Laplace est qu'il permet un calcul automatique.

Quand on résout par la méthode habituelle, il faut un peu d'intuition. Avec Laplace, aucune.
- les règles de TL sont claires et simples,
- elles intègrent directement les conditions initiales,
- elles donnent très rapidement $S(p)$,
- la décomposition en élément simples est très facile pour la machine qui produit tous les coefficients nécessaires, approximés ou pas,
- toute la gestion des complexes, modules et arguments ne pose aucun problème,
- le retour vers le temporel est direct.

5 Pour l'automaticien

5.1 La boucle ouverte

Supposons que l'on ait un dispositif comme celui vu plus haut



Dans le cadre d'un système automatique, e représenterait un signal de commande et s une grandeur que l'on veut commander.

Mais ces deux signaux n'ont généralement pas la même nature.

- Par exemple, e pourrait être une signal électrique, compris entre 0 et $5V$.
- s pourrait être une température que l'on voudrait contrôler.

La tension e pourrait commander un système de chauffage et on peut imaginer que la relation entre s et e serait donnée par une équation différentielle de forme :

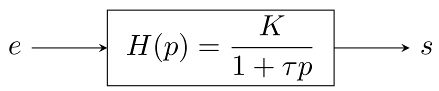
$$\tau\, s' + s = K\, e$$

Dans cette équation, τ représente un temps et est caractéristique du temps de réponse. K est un facteur chargé d'unité. Ici on passe de V à $°C$ donc K en $°C/V$.

Si on passe en Laplace, on a :

$$\tau\, pS + S = K\, E \Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

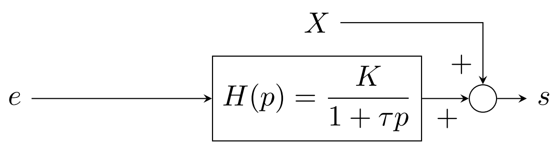
L'automaticien qui voit ce $\dfrac{K}{1+\tau p}$ reconnaît instantanément un premier ordre.



On appelle cela la boucle ouverte. Le sens de ce terme deviendra plus clair ensuite quand on verra la boucle fermée.

5.2 Nécessité d'une contre-réaction

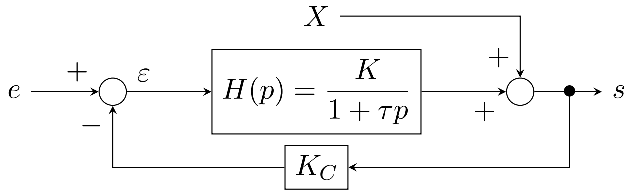
On pourrait penser que, comme nous avons tous les éléments, on peut prévoir exactement la sortie pour une entrée donnée. Le problème est qu'on ne connaît jamais parfaitement le système d'autant qu'il est susceptible d'être influencé par des perturbations extérieures : il sera plus difficile de chauffer s'il fait froid dehors. On ne peut donc pas se fier uniquement à la fonction de transfert $H(p)$.



Ci-dessus, on voit qu'un bruit X vient se rajouter. Bien sûr, on ne sait pas exactement ce qu'est ce bruit et comment il s'ajoute. C'est une simple modélisation. On voudrait que la sortie soit commandée par la consigne e et que le système arrive à s'adapter en dépit du bruit X imprévisible.

5.3 La contre réaction

Pour compenser ce problème, on prévoit un capteur qui donne une image de la sortie et la compare à l'entrée. On parlera ici de boucle fermée.



Ici K_c est le gain du capteur (donc en $V/°\,C$) et $\varepsilon = e - K_C\, s$ représente l'erreur entre la consigne demandée et ce que l'on obtient en sortie.

Ce n'est donc plus e qui est en entrée du système du système mais ε.

$$S(p) = H(p) \cdot \varepsilon + X(p) = H(p) \cdot \Big(E(p) - K_C \cdot S(p)\Big) + X(p)$$

Si on remet tout en place on aura :

$$S(p) = \frac{H(p)}{1 + K_C \cdot H(p)} \cdot E(p) + \frac{1}{1 + K_C \cdot H(p)} \cdot X(p)$$

Le but de l'automaticien sera de rendre l'erreur ϵ proche de 0 et de faire en sorte que l'effet de X soit annulé. On comprend par exemple ici que si $H(p) \cdot K_C$ est grand, cela réduira grandement l'impact de $X(p)$ sur la sortie.

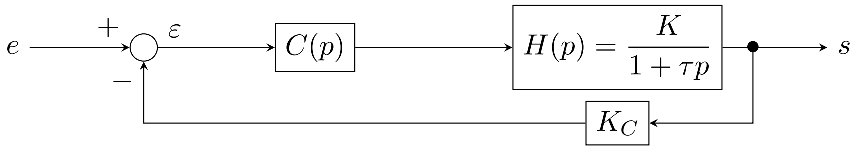
5.4 Correction

Le fonction de transfert $H(p)$ est déterminée par la physique du système. On aura un chauffage qui a certaine contrainte, un moteur, etc.

Supposons par exemple que l'on dispose d'un four et que l'on souhaite le préchauffer à $150\,°\,C$ aussi rapidement que possible. Si on connaît bien son four, on pourra lui demander $200\,°\,C$ quelques minutes pour qu'il monte plus vite en température puis rectifier la commande et la placer à à $150\,°\,C$.

C'est le travail du correcteur : il s'agit d'un dispositif, généralement électronique, qui reçoit la consigne de l'utilisateur et qui l'adapte pour commander le dispositif au mieux.

Voici comment on place le correcteur (j'ai enlevé la perturbation X) :



On obtient alors :

$$S(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + K_C \cdot C(p) \cdot H(p)}$$

Maintenant, tout le travail de l'automaticien sra de choisir $C(p)$ pour optimiser le fonctionnement du dispositif. On a généralement trois attentes :

- **vitesse :** on veut que la sortie atteigne vite la valeur demandée,
- **précision :** on veut que l'erreur ε soit petite,
- **stabilité :** on veut que les éventuelles perturbations ne risquent pas d'empêcher l'équilibre du système et que l'asservissement sache ramener l'équilibre si l'équilibre est perdu.

Mais l'automaticien doit faire des compromis car :

- Plus de vitesse a tendance à être déstabilisant,
- plus de précision également.

5.5 Le PID

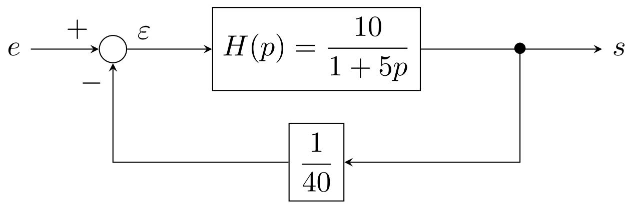
Il existe un correcteur classique composé de trois ingrédients :

- Proportionnel : K, amène de la précision et de la vitesse,
- Intégral : $\dfrac{K_I}{p}$ seul à être capable de réduire ε exactement à 0, mais lent et potentiellement déstabilisant,
- Dérivé : $K_D p$ permet de réagir vite à tout changement de la consigne.

Il existe des techniques consistant à prendre des mesures sur le système permettant de calculer exactement comment régler les 3 coefficients du PID afin d'obtenir le correcteur idéal.

5.6 Un exemple

Prenons $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$. Si c'est un four par exemple, τ peut être de 5 minutes. À titre d'exemple, disons que $K = 10$. Et en admettant que s soit une température pouvant aller de 0 à $200\,^\circ C$ et que notre commande soit entre 0 et $5\,V$. On peut dire que $K_c = \frac{1}{40}$ ainsi $5V$ correspond à $200\,^\circ C$.



On déduit :

$$S(p) = \frac{H(p)\cdot E(p)}{1+K_C\cdot H(p)} = \frac{\frac{10}{1+5p}\cdot E(p)}{1+\frac{1}{40}\cdot\frac{10}{1+5p}} = \frac{10\cdot E(p)}{1+5p+0,25}$$

Supposons que $E(p) = \frac{5}{p}$, c'est à dire que l'on veut monter la sortie à 200.

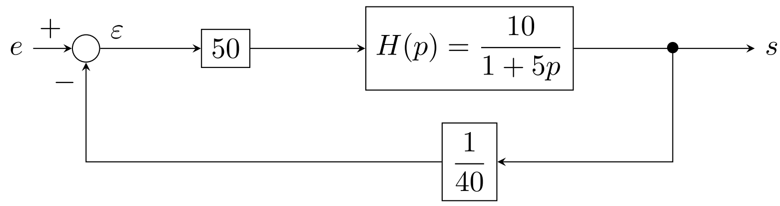
$$S(p) = \frac{50}{p\cdot(1,25+5p)}$$

On voit que l'on a deux pôles, le pôle en p qui vient de l'échelon en entrée et ne pose pas de problème, un pôle en $1,25+5p = 0 \Rightarrow p = -\dfrac{1,25}{5} = -0,25$.

On est donc déjà certain que le système va converger et que l'on aura un terme en $\mathrm{e}^{-0,25t}$. La constante de temps est donc en $\frac{1}{0,25} = 4$. On peut donc évaluer que la valeur d'équilibre est atteinte en $\approx 3\times 4 = 12\,min$.

Comme la sortie converge, le théorème de la valeur finale doit fonctionner. On sait donc $s_\infty = \lim\limits_{p\to 0} p\cdot S(p) = \dfrac{50}{1,25} = 40$.

Ça ne va pas du tout, l'erreur est énorme, on n'atteint pas du tout la température cible. On doit mettre un correcteur. On envisage un correcteur proportionnel.



On déduit :

$$S(p) = \frac{50\cdot\frac{10}{1+5p}\cdot E(p)}{1+50\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{10}{1+5p}} = \frac{500\cdot E(p)}{1+5p+12,5}$$

Toujours avec $E(p) = \dfrac{5}{p}$

$$S(p) = \frac{2500}{p \cdot (13,5 + 5p)}$$

Les constatations sont les mêmes avec des valeurs différentes.

- Pôle en $13,5 + 5p = 0$ donc $p = -2,7$ soit une constante de temps de $\frac{1}{2,7} \approx 0,37$ et un temps de réponse de $\approx 3 \times 0,37 = 1,01\, min$.
- Une convergence vers $\lim\limits_{p \to 0} p \cdot S(p) = \dfrac{2500}{13,5} \approx 185$

Cette fois, la sortie semble à peu près converger vers la valeur voulue. Le correcteur a produit l'effet désiré.

Bien sûr on pourrait augmenter la valeur du correcteur mais cela a des limites : on ne peut pas faire chauffer notre four aussi chaud que l'on veut, il y a forcément des valeurs de saturation.

On pourrait tenter un correcteur en $50 + \frac{1}{p}$. Le $\frac{1}{p}$ est un intégrateur et il aura pour effet d'annuler l'erreur résiduelle. Mais il ajoute un pôle supplémentaire ce qui est potentiellement déstabilisant (sans l'intégrateur, le système est d'ordre 1 et inconditionnellement stable, avec un pôle de plus il devient d'ordre 2 et peut devenir instable)