

De cos + sin à exp

Dans une série de Fourier, on a des termes en $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$. On sait que :

$$e^{jn\omega t} = \cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t) \quad \Rightarrow \quad \cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

On voit donc que au lieu d'avoir un mélange de cos et sin, on n'aura que des exp. Cependant, on aura des exposants positifs et négatifs. Autrement dit, au lieu de sommer $\sum_{n \geq 0}$, on aura $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_n c_n e^{jn\omega t}$$

Calcul des coeffs

Il n'y a plus qu'une seule formule :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega t}$$

Il est inutile de calculer les termes pour $n < 0$ car comme $f(t) \in \mathbb{R}$, on sait que $c_{-n} = \overline{c_n}$. On continue à être obligé de calculer c_0 à part car $e^{jn\omega t}$ a un comportement différent pour $n = 0$.

$$a_0 = c_0 \quad ; \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad ; \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$$

Parseval et spectre

$$\overline{f^2} = \sum_n |c_n|^2$$

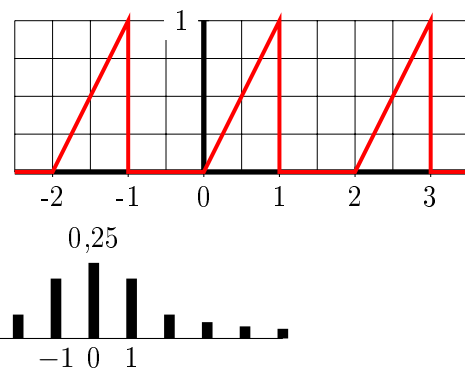
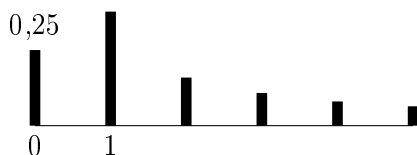
Quand a spectre, c'est plus simple : On a simplement des raies de hauteur $C_n = |c_n|$.

En revanche, il y a une bizarrerie : le spectre en complexe s'étend du côté positif et du côté négatif. Bien que étonnant, cela permet d'expliquer certains phénomènes comme la fameuse règle de Shanon disant que l'on doit échantillonner à $2 \times$ la fréquence max (par ex. on échantillonne à 44kHz pour les CDs audio)

ce spectre est pair : $|c_{-n}| = |c_n|$. On retrouve le spectre habituel en repliant les fréquences négatives sur les positives (en les cumulant)

Exemple

$$f(t) \text{ de période } 2, \text{ avec } f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq t < 0 \end{cases}$$



Fonction de transfert

Prenons une équation différentielle **linéaire** quelconque, par exemple :

$$e = s + \tau s'$$

- Dans le cadre du **régime permanent** on ne s'intéresse pas au morceau de solution en $K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
- Comme on n'a pas besoin de calculer K , on n'a pas non plus besoin de connaître $s(0)$.
- Il nous suffit de trouver une solution particulière.

Puisque nous pouvons décomposer $e(t) = \sum_n c_n e^{jn\omega t}$, nous voyons qu'il va nous suffire de résoudre l'équation pour $e(t) = E e^{j\omega t}$ (le n ne change pas grand chose à ce stade et nous pourrons l'ajouter après)

L'équation devient donc :

$$E e^{j\omega t} = s(t) + \tau s'(t)$$

On cherche une solution particulière $s(t)$, on envisage $s(t) = S e^{j\omega t + \varphi}$

$$E e^{j\omega t} = S e^{j\omega t + \varphi} + \tau j\omega S e^{j\omega t + \varphi}$$

On voit que la dérivée agit comme une multiplication par $j\omega$. On peut tout simplifier par $e^{j\omega t}$ et obtenir :

$$\frac{S}{E} e^{j\varphi} = H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

De sorte que l'on obtient le gain et la phase :

$$G(\omega) = \frac{S}{E} = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad ; \quad \varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(\tau\omega)$$

On aurait pu obtenir la fonction de transfert directement si on admet que :

$$H = \frac{s}{e} \text{ et } s' = j\omega s \text{ alors } e = s + \tau s' \Rightarrow e = s + j\tau\omega s \Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

C'est simple et ce n'est pas plus compliqué si l'équation différentielle est d'ordre 2.

On peut enfin tracer le diagramme de Bode, avec $\omega_c = \frac{1}{\tau}$:

