

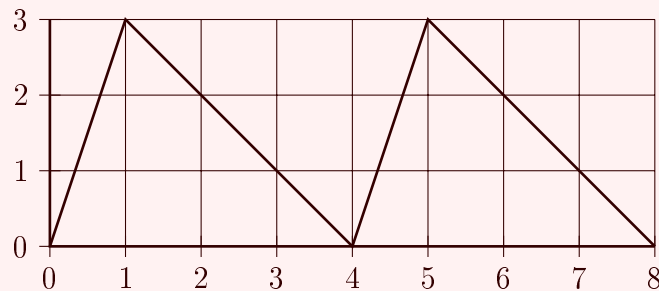
Soit s le signal de période $T = 4$, défini par $\begin{cases} s(t) = 3t & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ s(t) = 4 - t & \text{pour } 1 < t \leq 4 \end{cases}$

On souhaite déterminer la décomposition en série de Fourier complexe de ce signal puis étudier son spectre.

1) Donner la valeur exacte de la pulsation ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

2) Tracer la courbe de $s(t)$ pour $t \in [0; 8]$.



3) On suppose que l'on peut décomposer s en série de Fourier complexe. Calculer le coefficient c_0 de cette décomposition.

$c_0 = a_0$, c'est la même formule : $c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$.

L'intégrale n'est autre que l'aire sous la courbe d'une période. Cette courbe forme un triangle donc :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

On peut donc conclure que $c_0 = \frac{1}{T} \times \mathcal{A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

4) On veut calculer les coefficients c_n , $n \in \mathbb{Z}^*$.

Nous allons procéder par étapes.

Aide : une primitive de $f(t) = t \cdot e^{-jn\omega t}$ est $F(t) = \frac{jn\omega t + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega t}$

a) Montrer que $\int_0^1 s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = 3 \cdot \left(\frac{jn\omega + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega} - \frac{1}{n^2\omega^2} \right)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt &= \int_0^1 3t \cdot e^{-jn\omega t} dt \\
&= 3 \cdot \int_0^1 t \cdot e^{-jn\omega t} dt \\
&= 3 \cdot \left[\frac{jn\omega t + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega t} \right]_0^1 \\
&= 3 \cdot \left(\frac{jn\omega + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega} - \frac{1}{n^2\omega^2} \right)
\end{aligned}$$

b) On admettra que $\int_1^4 s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = \frac{-3jn\omega \cdot e^{-jn\omega} - 1 + e^{-jn\omega}}{n^2\omega^2}$

Montrer que $c_n = 4 \frac{e^{-jn\pi/2} - 1}{n^2\pi^2}$

Démonstration pour la partie admise (donc pas demandée)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt &= \int_1^4 (4-t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \\
&= 4 \cdot \int_1^4 e^{-jn\omega t} dt - \int_1^4 t \cdot e^{-jn\omega t} dt \\
&= 4 \cdot \left[\frac{1}{-jn\omega} \cdot e^{-jn\omega t} \right]_1^4 - \left[\frac{jn\omega t + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega t} \right]_1^4 \\
&= 4 \cdot \left(\frac{e^{-jn\omega \cdot 4} - e^{-jn\omega}}{-jn\omega} \right) - \left(\frac{jn\omega \cdot 4 + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega \cdot 4} - \frac{jn\omega + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega} \right)
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on sait que $4\omega = 2\pi$, donc $e^{-jn\omega \cdot 4} = 1$. De plus on peut mettre au même dénominateur : $\frac{1}{-jn\omega} = \frac{jn\omega}{n^2\omega^2}$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt &= 4 \cdot \left(\frac{1 - e^{-jn\omega}}{-jn\omega} \right) - \left(\frac{4jn\omega + 1}{n^2\omega^2} - \frac{jn\omega + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega} \right) \\
&= 4jn\omega \cdot \left(\frac{1 - e^{-jn\omega}}{n^2\omega^2} \right) - \left(\frac{4jn\omega + 1}{n^2\omega^2} - \frac{jn\omega + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega} \right) \\
&= \frac{4jn\omega - 4jn\omega \cdot e^{-jn\omega} - 4jn\omega - 1 + jn\omega \cdot e^{-jn\omega} + e^{-jn\omega}}{n^2\omega^2} \\
&= \frac{-3jn\omega \cdot e^{-jn\omega} - 1 + e^{-jn\omega}}{n^2\omega^2}
\end{aligned}$$

Correction pour c_n (donc à faire)

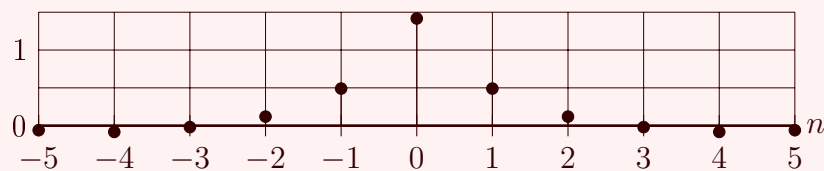
$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{4} \left[\int_0^1 s(t) e^{-jn\omega t} dt + \int_1^4 s(t) e^{-jn\omega t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[3 \cdot \left(\frac{jn\omega + 1}{n^2\omega^2} \cdot e^{-jn\omega} - \frac{1}{n^2\omega^2} \right) + \frac{-3jn\omega \cdot e^{-jn\omega} - 1 + e^{-jn\omega}}{n^2\omega^2} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{3jn\omega e^{-jn\omega} + 3e^{-jn\omega} - 3 - 3jn\omega e^{-jn\omega} - 1 + e^{-jn\omega}}{n^2\omega^2} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{4e^{-jn\omega} - 4}{n^2\omega^2} \right] \\
 &= \frac{e^{-jn\omega} - 1}{n^2\omega^2} \\
 &= 4 \frac{e^{-jn\pi/2} - 1}{n^2\pi^2}
 \end{aligned}$$

5) Tracer le spectre pour $-5 \leq n \leq 5$.

La calculatrice dispose de fonctions pour les complexes. On peut par exemple définir une fonction $f(x) = \left| 4 \frac{e^{-jn\pi/2} - 1}{n^2\pi^2} \right|$ puis faire un tableau de valeur pour obtenir toutes les valeurs nécessaires :

n	0	1	2	3	4	5
$ c_n $	1,5	0,5732	0,2026	0,0637	0	0,0229

Inutile de calculer $|c_{-1}|, |c_{-2}| \dots$ car le spectre est toujours pair donc symétrique.



6) On admettra que la puissance du signal est $P = 3$

Déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour atteindre 99,9% de la puissance du signal.

Démonstration pour la puissance (admise donc pas demandée)

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^1 s(t)^2 dt + \int_1^4 s(t)^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^1 (3t)^2 dt + \int_1^4 (4-t)^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^1 9t^2 dt + \int_1^4 (16 - 8t + t^2) dt \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[[3t^3]_0^1 + \left[16t - 4t^2 + \frac{t^3}{3} \right]_1^4 \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[3 + \left(16 \times 4 - 4 \times 4^2 + \frac{4^3}{3} \right) - \left(16 - 4 + \frac{1}{3} \right) \right] \\
&= \frac{12}{4} = 3
\end{aligned}$$

Recherche de la valeur de n

On sait que $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$. Nous cherchons une valeur de N telle que

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = 0,999 \cdot P = 2,997$$

Soit on prend la calculatrice et on écrit quelque chose comme :

$$1,5^2 + 2 \times \sum_{k=1}^2 \left| 4 \frac{e^{-jn\pi/2} - 1}{n^2\pi^2} \right|^2$$

Puis on ajuste la borne 2 jusqu'à dépasser 2,97. On constate que l'on atteint 2,990 pour $N = 2$ et 2,997 pour $N = 3$.

La réponse est donc $N = 3$.

On aurait pu prendre aussi les résultats approximatifs de la question précédente. Par exemple pour $N = 2$ on obtient une somme :

$$0,2026^2 + 0,5732^2 + 1,5^2 + 0,5732^2 + 0,2026^2 \approx 2,989$$

ce qui ne suffit pas, il faut donc ajouter le terme de rang 3 (il faut l'ajouter 2 fois car il faut prendre $|c_3|^2$ et $|c_{-3}|^2$ qui ont la même valeur).

Remarque : le raisonnement que l'on a tenu manque un peu de réalisme. On constate ici que 3 harmoniques suffisent à contenir 99,9% de la puissance du signal ce qui donne l'impression que ces 3 harmoniques (de part et d'autre) contiennent tout ce qu'il y a à savoir sur le signal.

Mais ce n'est sûrement pas le cas. Ici, la valeur moyenne c_0 représente une grande

part de la puissance du signal (75%) et pourtant c_0 porte très peu d'information voire aucune...

Il serait en vérité plus pertinent de ne considérer que la puissance hors valeur moyenne. La valeur moyenne porte une puissance de $1,5^2 = 2,25$. Il manque encore 0,75 pour atteindre la puissance totale. On peut se demander combien il faut d'harmoniques pour atteindre par exemple 99,9% de ces 0,75.

$$2 \sum_{n=1}^N = 0,999 \times 0,75 = 0,74925$$

Cette fois on constate qu'il faut $N = 6$.