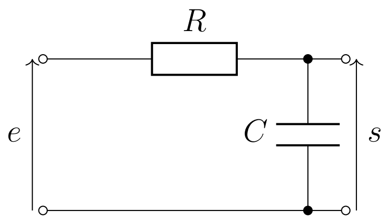
I Exemple de problème

Considérons le système simple ci-dessous.



L'équation différentielle pour ce circuit est :

$$(\mathcal{E}): \quad e = s + RC \cdot s'$$

Ce qui nous permet de voir que RC est homogène à un temps. On note alors souvent $RC = \tau$ et alors :

$$(\mathcal{E}): \quad e = s + RC \cdot s'$$

Si on veut résoudre complètement l'équation différentielle, il nous faut une condition initiale. Posons par exemple $s(0) = 0$.

Dans cette équation, on peut qualifier $e(t)$ de **terme source**. En l'absence de $e(t)$, on aurait tout simplement $s(t) = 0$ et il ne se passerait rien. C'est parce qu'il y a une entrée non nulle qu'il se passe quelque chose en sortie. En quelque sorte, $e(t)$ est la source des phénomènes observés en sortie.

II La méthode en quatre points

a) On commence par résoudre l'équation sans second membre :

$$(\mathcal{E}_0): \quad 0 = s + \tau \cdot s'$$

On en déduit $s' = -\dfrac{1}{\tau}\, s \Rightarrow s_0 = K \cdot \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right), K \in \mathbb{R}$

Important : Cette solution ne dépend que du circuit, pas de ce que l'on met en entrée.

b) On cherche une solution s_1 à l'équation $(\mathcal{E})$. Naturellement, cette solution dépend de e.

Par exemple, on trouve facilement que si $e = E$ constant, on pourra choisir $s_1 = E$.

En revanche, si $e = \sin(2t)$, la solution sera quelque chose comme $s_1 = A\sin(2t + \varphi)$ et il faudra trouver la bonne valeur pour A et φ (ce qui est un peu pénible)

c) L'ensemble des solutions est $s = s_0 + s_1$.

Donc, puisque $s_0 = K \cdot \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$, alors

$$s(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + s_1(t)$$

d) En utilisant la condition initiale, $s(0) = 0$, on a

$$s(0) = K \cdot \exp(0) + s_1(0) = 0 \Rightarrow K = -s_1(0)$$

Conclusion, selon l'entrée e, on a une certaine solution s_1 et on obtient :

$$s(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + s_1(t), \text{ avec } K = -s_1(0)$$

III Transitoire et permanent

On voit que dans tous les cas, la solution contient un terme en $K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Ce terme a une durée de vie de quelques τ :

- Pour $t = 0$, ce terme vaut K,
- Au bout de 3τ, il ne vaut plus que $5\,\%$ de K
- Au bout de $4,6\tau$, il ne vaut plus que $1\,\%$ de K
- Au bout de 10τ, il ne vaut plus que $0,005\,\%$ de K

  Autant dire que au bout de 10τ il ne reste déjà plus rien de cette partie du signal.

Donc, par exemple, pour $\tau = RC = 2\,ms$, ce qui est tout à fait banal en électronique, au bout de $20\,ms$, il ne reste plus rien du terme $K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

- Au tout début, quand ce terme est encore visible, on parle de **régime transitoire**. On observe alors les effets de la mise en route du système ou, dit autrement, de l'événement qui s'est produit à $t = 0$.

  D'après ce que l'on vient de dire, on comprend que pour observer le régime transitoire, il faut pouvoir observer le signal pour $0 \leqslant t \lesssim 5\tau$.

  Dans le cas d'un phénomène électronique, τ est petit et le régime transitoire est très court. On ne pourra l'observer qu'en utilisant un oscilloscope à mémoire qui « prend en photo » ce moment particulier.

- Dès que t devient assez grand, au delà de 10τ environ, le terme $K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ devient négligeable. Dans ce cas on peut approximer :

  $$s(t) \approx s_1(t)$$

  Je vous rappelle que $s_1(t)$ est largement déterminé par $e(t)$. Comme on l'a dit, $e(t)$ est la source. C'est parce $e(t)$ fait quelque chose à partir de $t = 0$ que le système réagit et produit une certaine sortie $s(t)$.

  On peut dire que le régime transitoire correspond à une courte phase d'adaptation du système. Une fois que le transitoire est terminé, le système s'est adapté, on est en **régime permanent**.

  On peut donc dire que $s_1(t)$ est la solution de régime permanent.

IV Deux situations

IV.1 On s'intéresse au régime transitoire

Quand $e(t) = E$, il faut comprendre que pour $t < 0$ on avait $e(t) = 0$ et que d'un seul coup, à $t = 0$, $e(t)$ passe à E constant.

La sortie s'adapte donc à ce changement.

Dans ce cas la solution est simple :

$$s(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

On s'intéresse alors précisément à ce qui se passe au tout début, à la façon dont le système réagit. En particulier, on veut savoir combien de temps met le système pour trouver son nouvel équilibre.

Le régime transitoire est alors important et les 4 points de la méthode sont importants.

IV.2 On s'intéresse au régime permanent

On met une sinusoïde en entrée, par exemple $e(t) = \sin(2t)$

On observe e et s à l'oscilloscope mais on ne cherche pas du tout à voir le régime transitoire. On laisse courir le temps de sorte qu'on est largement au-delà de 10τ. Le $s(t)$ que l'on observe est égal à $s_1(t)$, on est en régime permanent.

Dans ce cas, seule l'étape (b) de la méthode a un intérêt.

Dans ce cas, comme on l'a dit, trouver s_1 peut être compliqué. C'est pourquoi on utilise une technique spéciale qui nous évite les calculs trigonométriques : on utilise les **nombres complexes**.