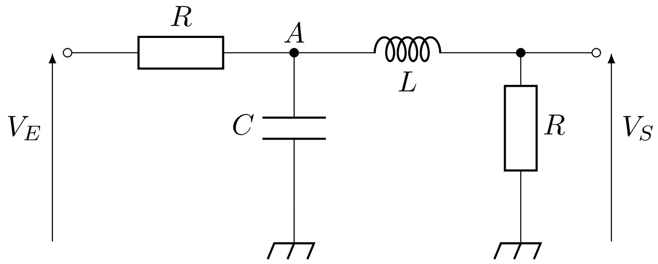
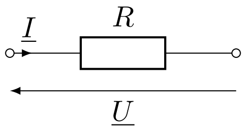
On considère le circuit ci-dessous.



Nous allons travailler en régime harmonique. Nous savons donc que nous pouvons considérer tous les dipôles présents comme linéaire.

$$\underline{Z_R} = R \quad \underline{Z_L} = jL\omega \quad \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$



Résistance :

$U = R \cdot I \Rightarrow \underline{U} = R \cdot \underline{I}$

donc $\underline{Z_R} = R$

Inductance :

$U = L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \underline{U} = jL\omega \cdot \underline{I}$

donc $\underline{Z_L} = jL\omega$

Condensateur :

$C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = I \Rightarrow jC\omega \cdot \underline{U} = \underline{I}$

donc $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$

1 Expression de $H(j\omega)$

1) Déterminer $\underline{V_A}$ en utilisant le théorème de Millman.

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_E}}{R}+\frac{\underline{V_S}}{\underline{Z_L}}+\frac{0}{\underline{Z_C}}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{\underline{Z_L}}+\frac{1}{\underline{Z_C}}} \underset{\times R}{\overset{\times R}{=}} \frac{\underline{V_E}+\frac{R\cdot\underline{V_S}}{\underline{Z_L}}}{1+\frac{R}{\underline{Z_L}}+jRC\omega} \underset{\times jL\omega}{\overset{\times jL\omega}{=}} \frac{jL\omega\cdot\underline{V_E}+R\cdot\underline{V_S}}{jL\omega+R+RLC(j\omega)^2}$$

2) En utilisant le pont diviseur sur L et R, donner $\underline{V_S}$ en fonction de $\underline{V_A}$.

$$\underline{V_S} = \frac{R}{\underline{Z_L}+R}\cdot\underline{V_A} = \frac{R}{jL\omega+R}\cdot\underline{V_A}$$

3) En déduire $H(j\omega) = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$.

$$\underline{V_S} = \frac{R}{jL\omega + R} \cdot \frac{jL\omega \cdot \underline{V_E} + R \cdot \underline{V_S}}{jL\omega + R + RLC(j\omega)^2}$$
$$(jL\omega + R) \cdot [...] \underline{V_S} = R \cdot \left(jL\omega \cdot \underline{V_E} + R \cdot \underline{V_S}\right)$$
$$(jL\omega + R) \cdot [...] \cdot \underline{V_S} - R^2 \cdot \underline{V_S} = jLR\omega \cdot \underline{V_E}$$
$$\left(jL\omega \cdot [\cdots] + jLR\omega + \cancel{R^2} + R^2LC(j\omega)^2 - \cancel{R^2}\right) \cdot \underline{V_S} = jLR\omega \cdot \underline{V_E}$$

Ici, $[...] = jL\omega + R + RLC(j\omega)^2$

On peut aussi simplifier par $jL\omega$:

$$\left([\cdots] + R + jR^2C\omega\right) \cdot \underline{V_S} = R \cdot \underline{V_E}$$
$$H(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{R}{[\cdots] + R + jR^2C\omega}$$
$$= \frac{R}{jL\omega + R + RLC(j\omega)^2 + R + jR^2C\omega}$$

On peut diviser par R en haut et en bas et regrouper :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\frac{L}{R}\omega + 1 + LC(j\omega)^2 + 1 + jRC\omega}$$
$$= \frac{1}{2 + \left(\frac{L}{R} + RC\right) \cdot (j\omega) + LC \cdot (j\omega)^2}$$

L'usage est de mettre 2 en facteur :

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{R} + RC\right) \cdot (j\omega) + \frac{LC}{2} \cdot (j\omega)^2}$$

2 Application numérique

$$R = 1\,k\Omega \quad C = 1\,\mu F \quad L = 0{,}1\,H$$

1) Exprimer $H(j\omega)$ en faisant l'application numérique. On se contentera de 2 chiffres significatifs pour les valeurs.

- $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{R} + RC\right) = 5{,}5 \cdot 10^{-4}\,s$
- $\frac{LC}{2} = 5 \cdot 10^{-8}\,s^2$
- $H(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+5{,}5\cdot 10^{-4}\cdot j\omega + 5\cdot 10^{-8}\cdot (j\omega)^2}$

3 Gain

On s'intéresse maintenant au gain $G = |H(j\omega)|$.

1) Exprimer $G(\omega)$.

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - 5 \cdot 10^{-8} \cdot \omega^2)^2 + (5,5 \cdot 10^{-4} \cdot \omega)^2}}$$

2) On essaie de savoir de quel type de filtre il s'agit.

a) Que vaut G quand $\omega \to 0$?

$$\omega \to 0 \Rightarrow G \to \frac{1}{2}$$

b) Que vaut G quand $\omega \to +\infty$.

$$\omega \to +\infty \Rightarrow G \to 0$$

c) Conclure.

Il s'agit donc d'un filtre passe bas. La présence de $(j\omega)^2$ dans le dénominateur de H indique que c'est un filtre du 2e ordre.

4 Courbes

On va tracer différentes courbes de G.

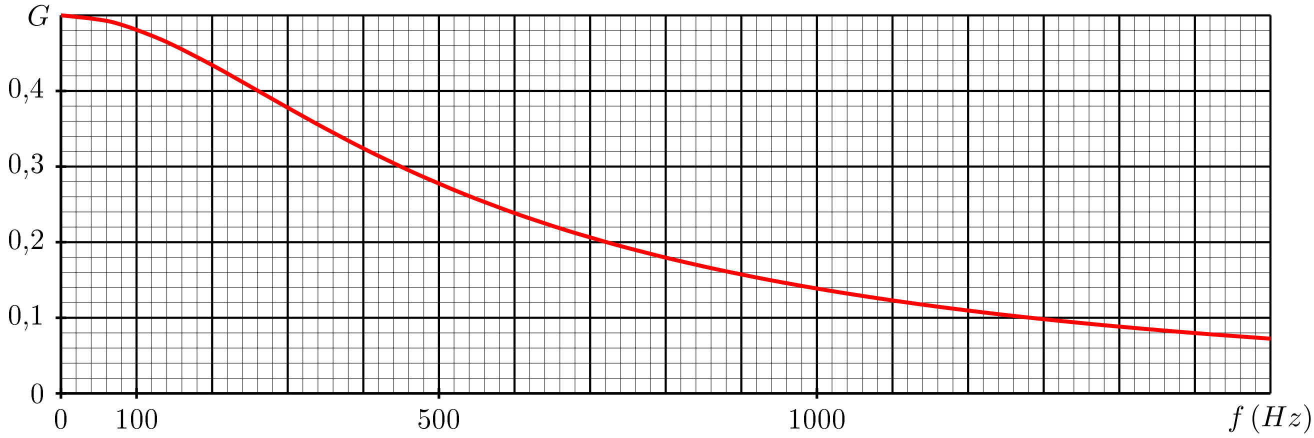
L'idée est de voir que tracer simplement la courbe de G sans chercher à adapter les axes, ce n'est pas le plus efficace. C'est pour cette raison que l'on propose des graphiques plus adaptés bien que moins faciles à comprendre du premier coup.

La fonction G précédente, selon l'usage, a pour argument ω. Pourtant, quand on trace la courbe de G, on a plutôt tendance à mettre f en abscisses. Nous allons donc reformuler G en fonction de f. Il suffit de remplacer tous les ω par des $2\pi f$. Pour simplifier je donne la formule avec les applications numériques faites et l'expression développée.

$$G(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 8 \cdot 10^{-6} \cdot f^2 + 4 \cdot 10^{-12} \cdot f^4}}$$

4.1 Courbe habituelle

Tracer G sur le graphique



4.2 Axe de fréquence logarithmique

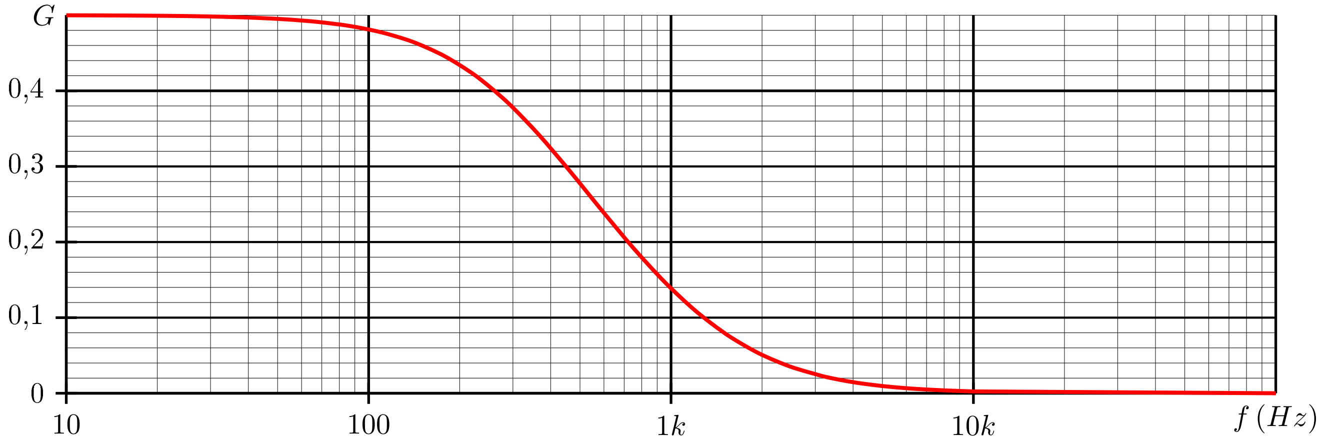
Sur le graphique précédent, on ne peut afficher qu'une gamme restreinte de fréquence.

En général, pour un circuit électronique, il ne se passe pas grand chose quand la fréquence se contente de doubler ou tripler. On a besoin d'afficher de grandes gammes de fréquences.

Mais si on se contente de dézoomer, on ne voit plus grand chose...

On préfère donc un axe logarithmique : sur l'axe horizontal, un écart donné correspond à une multiplication constante.

Tracer la courbe de G.



4.3 Diagramme de Bode

Ça ne suffit encore pas : on préfère exprimer le gain en décibels.

$$G_{dB} = 20\,\log(G)$$

1) Exprimer G_{dB} pour f proche de 0.

   Tracer la ligne correspondante. C'est une ligne horizontale, vous pouvez la tracer sur toute la largeur du graphique.

$$G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{2}\right) = -6\,dB$$

On a tracé la droite en bleu ci-dessous.

2) Il arrive un moment où le terme en f^4 devient prépondérant. Dans ce cas on peut faire l'approximation :

$$G(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-12} \cdot f^4}}$$

   Exprimer dans ce cas G_{dB} en simplifiant et en faisant apparaître $\log f$.

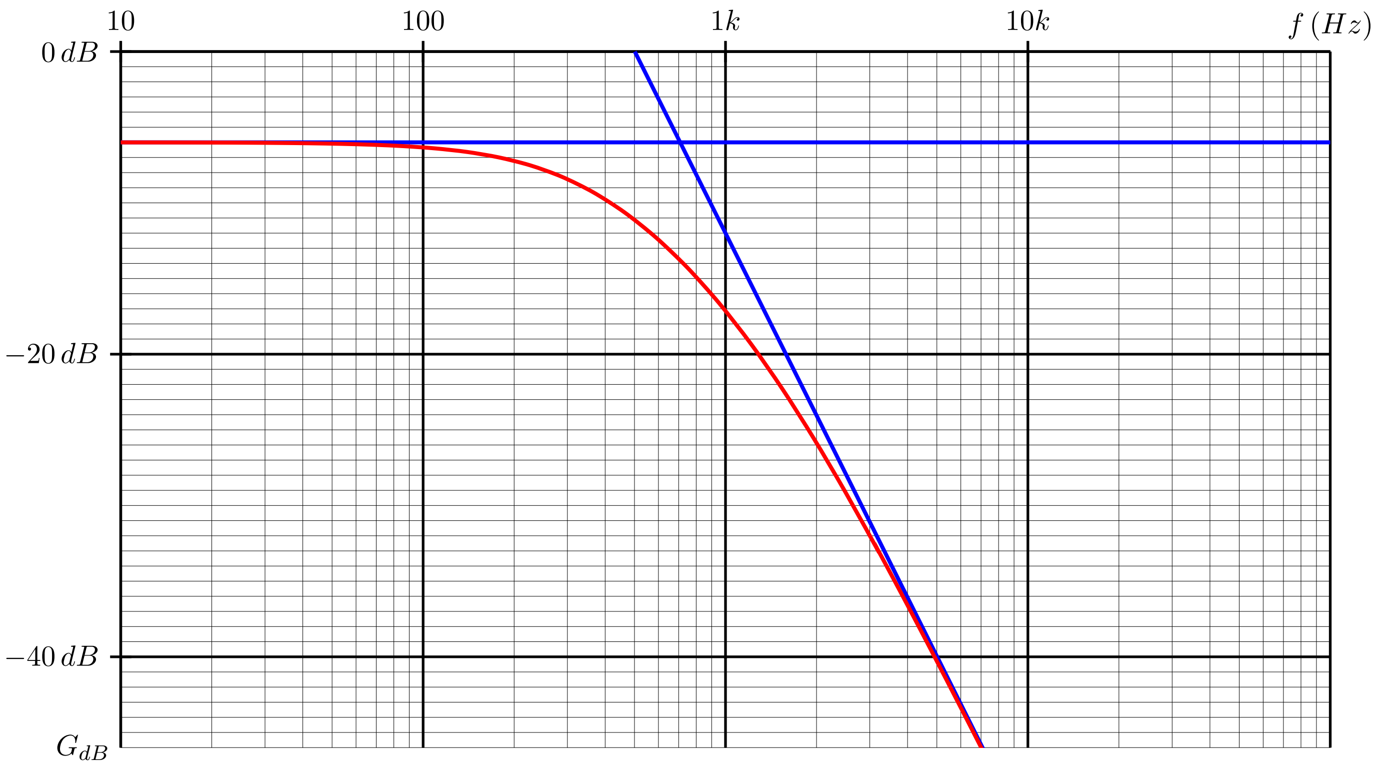
   $\log f$ a le rôle de x sur le graphique. Tracer la droite correspondante.

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cdot 10^{-12}\cdot f^4}}\right) \\ &= 20\log(0,5) - 10\log\left(4\cdot 10^{-12}\cdot f^4\right) \\ &= 108 - 40\log(f) \end{aligned}$$

En particulier, cette quantité s'annule quand $108 - 40\log(f) = 0$, donc quand $\log(f) = 2,7$ donc pour $f \approx 500$. Ensuite, chaque fois que f est multipliée par 10, la valeur descend de $40\,dB$.

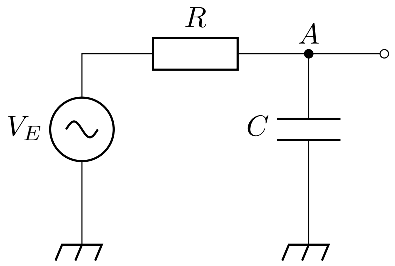
On a tracé la droite en bleu ci-dessous.

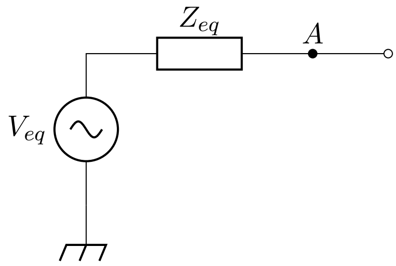
3) Représenter la courbe de G_{dB}.



5 Bonus

Le calcul de $H(j\omega)$ n'était pas évident. On peut essayer de le faire avec Thévenin.



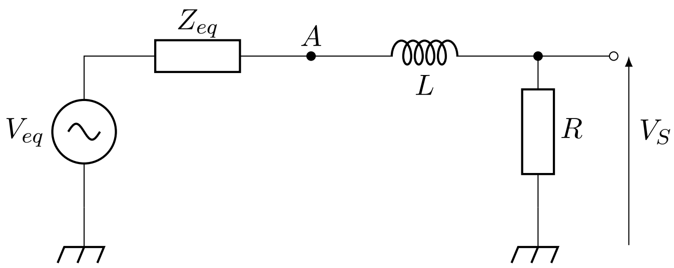


V_{eq} est la tension quand le courant sortant est $0\,A$, donc ici c'est la tension de pont diviseur :

$$V_{eq} = \frac{Z_C}{Z_C + R} \cdot V_E = \frac{1}{1 + jRC\omega} \cdot V_E$$

Z_{eq} est l'impédance équivalente quand il n'y a plus le générateur :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + jC\omega \Rightarrow Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$



On a maintenant un pont diviseur :

$$\begin{aligned}
V_S &= \frac{R}{Z_{eq} + jL\omega + R} \cdot V_{eq} \\
&= \frac{R}{\frac{R}{1+jRC\omega} + jL\omega + R} \cdot \frac{1}{1 + jRC\omega} \cdot V_E \\
H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} &= \frac{R}{R + jL\omega + RLC(j\omega)^2 + R + jRC\omega} \\
&= \frac{1}{2 + \left(\frac{L}{R} + RC\right) \cdot (j\omega) + LC \cdot (j\omega)^2}
\end{aligned}$$

On obtient bien la même chose.