1 Racines

Nos allons considérer un nombre $z_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

1) Commençons par $n = 1$.

   Que vaut z_1 ?
2) Ensuite $n = 2$.
   a) Que vaut z_2 ?
   b) Vérifier que $z_2 + 1 = 0$
3) Ensuite $n = 3$.
   a) Que vaut z_3 ?
   b) Vérifier que $z_3^2 + z_3 + 1 = 0$
4) De façon générale, supposons que $z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$
   a) Justifier que $z = 1$ et $z = 0$ ne peuvent être une solution.
   b) Notons cette équation (E). Faire le calcul $z \times (E) - (E)$, montrer que $z^n = 1$.

      On qualifie donc une solution de (E) de racine nième de l'unité.

2 Lieux géométriques

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé. À chaque point M de coordonnées $(x\,;y)$, on peut associer un nombre complexe $z = x + i\,y$ que l'on nomme son **affixe**. Cela fonctionne dans l'autre sens : pour $z = x + \ y$ donné, on peut trouver un seul point M de coordonnées $(x\,;y)$.

On nomme **module** de z la quantité $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Elle correspond à une distance (on reconnaît le théorème de Pythagore)

En particulier, si A et B sont deux points du plan, z_A et z_B leurs affixes, alors

$$|z_A - z_B| = AB$$

On peut commencer l'exercice.

Soit M d'affixe z avec $z \neq -1$. On définit le complexe :

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

1) Soit $z = x + i\,y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

   Mettre w sous sa forme algébrique $a + i\,b$ en exprimant a et b en fonction de x et y.
2) Supposons que $\mathrm{Re}\,(w) = \frac{1}{2}$.
   a) En déduire une condition sur x et y,
   b) en déduire que l'ensemble des points M correspondant est un cercle dont il faut préciser le centre et le rayon.
3) Supposons que $|z - 1| = |z + 1|$.
   a) Traduire cette égalité en fonction de x et y
   b) En déduire l'ensemble des positions que peut prendre le point M.