

Dans le TD de présentation sur les nombres complexes, nous avons présenté les équations d'ordre 3 que la méthode de Cardan permet de résoudre :

$$x^3 + p \cdot x = q$$

- Calcul de $\Delta = 4p^3 + 27q^2$
- Solution $x_0 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}}$

1 Preuve

Notons $x_0 = A + B$, avec $A = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}}$ et $B = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}}$

$$\begin{aligned} x_0^3 + p \cdot x_0 &= (A + B)^3 + p \cdot (A + B) \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + p \cdot (A + B) \end{aligned}$$

On a déjà $A^3 + B^3 = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}} + \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}} = q$

Par ailleurs $3A^2B + 3AB^2 + p \cdot (A + B) = (A + B) \cdot (3AB + p)$

Il nous faut donc prouver que $3AB = -p$ ainsi aura-t-on l'égalité désirée.

$$\begin{aligned} 3AB &= 3\sqrt[3]{\left[\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right] \cdot \left[\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right]} \\ &= \sqrt[3]{\frac{27}{4} \cdot \left[q + \sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right] \cdot \left[q - \sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right]} \\ &= \sqrt[3]{\frac{27}{4} \cdot \left[q^2 - \frac{\Delta}{27}\right]} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{4} [27q^2 - \Delta]} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{4} [27q^2 - (4p^3 + 27q^2)]} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{4} [-4p^3]} \\ &= \sqrt[3]{-p^3} \\ &= -p \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$x_0^3 + p \cdot x_0 = (A^3 + B^3) + (A + B) \cdot (3AB + p) = q + (A + B)(-p + p) = q$$

On a bien l'égalité voulue, x_0 est bien solution de l'équation. Encore faut-il que l'on puisse écrire $\sqrt{\frac{\Delta}{27}}$.

2 Le cas à problème

Dans le TD on envisageait le cas $x^3 - 30x = 36$

Dans ce cas, on a $p = -30$, $q = 36$ donc $\frac{\Delta}{27} = -2704$. Comme on l'a vu, la solution coince car on ne peut pas calculer la racine de -2704 et pourtant l'équation a bien une solution.

Selon l'idée de Cardan, on fait comme si on pouvait écrire $\sqrt{-1} = i$ ce qui nous amène à :

$$x_0 = \sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i}$$

Dans le TD on montre que $\sqrt[3]{18 + 26i} = 3 + i$, mais comment peut-on trouver tout seul cette racine cubique ?

2.1 Cardan lui-même

Il semble que Cardan ne soit pas allé aussi loin. Lui-même ne savait pas trouver cette racine cubique. Il a seulement constaté dans des cas particuliers que cela semblait fonctionner. Il n'a donc pas développé d'outils permettant de calculer cette racine.

2.2 Cas de Bombelli

Un peu plus tard, Bombelli va plus loin. Il note que $(a + ib)^3 = A + iB$, et $(a - ib)^3 = A - iB$.

Dans le problème qui nous occupe, on a

$$x_0 = \sqrt[3]{A + iB} + \sqrt[3]{A - iB} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$$

Il s'agit donc d'être capable de trouver a et la solution sera $2a$.

$$\begin{aligned} (a + ib)^3 &= a^3 + 3ia^2b + 3i^2ab^2 + i^3b^3 \\ &= (a^3 - 3ab^2) + i(-b^3 + a^2b) \end{aligned}$$

On en déduit que $A = a^3 - 3ab^2 = a \cdot (a^2 - 3b^2)$ et $B = -b^3 + a^2b = -b \cdot (b^2 - 3a^2)$

Revenons à l'exemple :

$$\begin{cases} A = 18 = a \cdot (a^2 - 3b^2) \\ B = 26 = b \cdot (b^2 + 3a^2) \end{cases}$$

Si on fait l'hypothèse qu'il existe une solution entière à l'équation, alors $2a$ doit être entier. D'après la 2e équation, si a entier ou demi entier, alors b forcément entier. Et donc si b entier, d'après la première équation, a forcément entier.

On peut chercher a entier et même a diviseur de 18.

- $a = 1$ amène $18 = 1 \cdot (1 - 3b^2)$ donc $-17 = 3b^2$, ça ne va pas.
- $a = 2$ amène $18 = 2 \cdot (4 - 3b^2)$ donc $-5 = 3b^2$, ça ne va pas.
- $a = 3$ amène $18 = 3 \cdot (9 - 3b^2)$ donc $3 = 3b^2$. Alors $b = \pm 1$.

En essayant dans la 2e équation, on constate que $b = 1$ fonctionne.

Voilà, Bombelli trouve ainsi la solution $\sqrt[3]{18 + 26i} = 3 + i$ en faisant l'hypothèse qu'il pourra trouver une solution entière.

Évidemment, si l'équation est quelconque, alors on n'a pas forcément une solution entière et on ne pourra donc pas trouver la solution désirée...

2.3 Méthode approchée utilisant des tables

Dans les années suivantes, on a commencé à développer des tables logarithmiques et trigonométriques à usage des marins et ingénieurs.

Par exemple, on peut prouver que :

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]$$

Cela fonctionne si $|x| < 1$. Par exemple :

$$\ln(2) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right]$$

Bien sûr, on ne peut pas faire une somme à l'infini, alors on fait une somme de quelques termes ce qui donne une approximation. Cela fonctionne bien car en faisant la somme des 3 premiers termes comme dans l'exemple, on obtient $0,6930\dots$, on a donc 3 décimales justes (car $\ln(2) \approx 0,6931$)

Cette méthode fonctionne bien si x pas trop loin de 0. On pourra utiliser les relations de \ln . Par exemple si je veux calculer $\ln(7)$, je peux calculer $\ln(8) = 3 \ln(2)$ puis $\ln\left(\frac{7}{8}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}\right)$ puis calculer $\ln(7) = \ln(8) + \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

Des mathématiciens dont c'était le travail ont ainsi fait les calculs ce qui a permis d'obtenir les \ln avec une très bonne approximation de tous les nombres dont on avait besoin. On pouvait ainsi trouver les \ln de tous les entiers de 1 à 10 000.

On peut faire la même chose pour les \sin en utilisant par exemple :

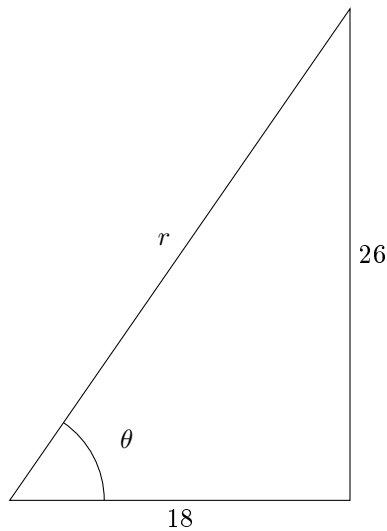
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

La formule converge vite et est valable pour tout x . Dans le cas des \sin , on n'a besoin que d'aller de 0 à $\pi/2$ (la formule est valable en radians)

Et encore, on peut utiliser des formules comme $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$.

Revenons à notre problème : Je veux la racine cubique de $18 + 26i$. Pour trouver la solution, il faut faire un peu de géométrie avec les complexes.

Géométriquement, le nombre $18 + 26i$ peut être vu comme le triangle ci-dessous.



On veut seulement a dans $\sqrt[3]{18 + 26i} = a + ib$. En complexe, la racine est simple (cf le cours sur la forme trigo des complexes), on aura $\sqrt[3]{18 + 26i} = \sqrt[3]{r} \cdot \exp\left(i\frac{\theta}{3}\right)$ et le nombre a désiré sera :

$$r^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Voici comment on peut faire avec seulement des calculs de base et des tables. On pourrait admettre que nous disposons d'une table des fonctions trigos pour tous les angles entiers de 0 à 90 degrés et du table de \ln pour les entiers de 1 à 10 000, et pour tous les dixièmes de 1 à 10 :

1) Calculer $r^2 = a^2 + b^2 = 1000$

2) Lire $\ln(1000)$ dans une table log.

On lit $\ln(1000) \approx 6,907755$ (arrondi bien sûr)

3) Diviser le résultat par 6 (équivalent de faire une puissance 1/6 vu que l'on part de r^2)

On trouve $\approx 1,151293$

4) Chercher le résultat dans la table log pour revenir dans l'autre sens (revient à faire \exp) et ainsi on obtient $\sqrt[3]{r}$

On trouve pour $\ln(3,1) \approx 1,131402$ et $\ln(3,2) \approx 1,163151$. On est entre les deux. On fait une interpolation linéaire pour approximer mieux et on trouve : $\approx 3,162651$

5) Calculer $\tan(\theta) = \frac{26}{18}$.

On trouve ≈ 1.444444

6) Avec une table \tan , en déduire θ

On trouve pour $\tan(55 \text{ deg}) \approx 1,428148$ et $\tan(73 \text{ deg}) \approx 1,482561$. Par interpolation pour 1.444444 on trouve un angle $\theta \approx 55,299487 \text{ deg}$

7) Diviser le résultat par 3

On trouve $\approx 18,433162 \text{ deg}$

8) Avec une table, prendre le cos de ce résultat

On a $\cos(18 \text{ deg}) \approx 0,951057$ et $\cos(19 \text{ deg}) \approx 0,945519$.

Par interpolation on trouve $\cos(18,433162 \text{ deg}) \approx 0,948658$

9) Multiplier le résultat de (4) par le résultat de (8). Voilà, c'est fini.

On trouve $0,948658 \times 3,162651 \approx 3,000274$

On trouve bien au final $a \approx 3$