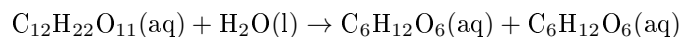


I Ajustement

Le saccharose, de formule brute $C_{12}H_{22}O_{11}$, est l'unique composant du sucre de table, quelle que soit sa forme (cristallisé, semoule, en grains, en morceaux, ...). Issu principalement de la culture de la betterave sucrière et de la canne à sucre, on le retrouve dans de nombreux produits sucrés.

L'hydrolyse du saccharose en solution aqueuse peut être modélisée par la réaction d'équation suivante :



On considère une canette de soda de 330 ml contenant 35 g de saccharose dont on étudie la transformation par hydrolyse au cours du temps.

On notera $[A]$ la concentration en saccharose, en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Comme cette concentration évolue au cours du temps, on note $y(t) = [A](t)$, le temps étant exprimé en jour.

Donnée : masse molaire du saccharose $M = 342 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 1) Calculer $y(0)$.

CORRECTION : $\frac{35 \text{ g}}{342 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \times 330 \text{ E} - 3 \text{ L}} \approx 0,31 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Remarquez que les unités nous disent quel calcul faire.

- 2) On fait l'hypothèse que la réaction chimique est d'ordre 1, c'est à dire que :

$$(E) : y' = -k \cdot y$$

- a) Donner l'unité de k .

CORRECTION : y est en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ donc $y' = \frac{dy}{dt}$ est en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{j}^{-1}$ et donc k est en j^{-1} .

Ceci sera confirmé un peu loin quand on aura $y = K e^{-k \cdot t}$: on doit avoir $k \cdot t$ sans unité et donc k en j^{-1}

- b) Donner la solution de (E) .

CORRECTION : $y(t) = K e^{-k \cdot t}$.

REMARQUE : Cette réponse, avec l'entraînement, devrait sembler évidente. On peut néanmoins donner le détail.

- $(E_0) : y' = -k \cdot y$ (pas de différence avec (E)). On a donc $y_0 = K \cdot e^{-k \cdot t}$, $K \in \mathbb{R}$.
- $y_1 = 0$ est une solution de (E) (il suffit de remplacer y par 0 dans (E) pour constater cette solution est valide)
- $y = y_0 + y_1 = K e^{-k \cdot t}$ est la solution générale de (E) avec $K \in \mathbb{R}$
- $y(0) = K e^0 = K$ et on sait que $y(0) = 0,31$, donc $K = 0,31$ et $y(t) = 0,31 e^{-k \cdot t}$

À noter qu'ici, le fait que $K = 0,31$ n'a pas grande importance. Tout ce qui nous intéresse est la forme de la fonction, c'est à dire que l'on a une forme exponentielle.

- 3) Pour trouver la valeur de k , on décide de faire un relever et un ajustement.

On obtient les valeurs suivantes :

t en jour	1	3	5	10	15	25
$[A]$ en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	0,294	0,265	0,239	0,185	0,143	0,085

- a) En accord avec le modèle, on propose le changement de variable suivant :

$$z = \ln([A])$$

Faites ce changement de variable et donner les paramètres de l'ajustement affine $z = a \cdot t + b$.

CORRECTION : L'ajustement fait on obtient $z = -0,0517 t - 1,1722$

- b) En déduire la valeur de k , arrondi à 10^{-4} près (avec l'unité!)

CORRECTION : On avait $y = K e^{-k \cdot t}$ donc $z = \ln(y) = \ln(K) - k \cdot t$. Or, $z = -0,0517 t - 1,1722$. Donc $k = 0,0517$.

$$k = 0,0517 \text{ j}^{-1}$$

On pourrait dire aussi que $\ln(K) = -1,1722$ donc $K = 0,3097 \approx 0,31$ comme prévu

- 4) Pour la suite, on admettra (pas tout à fait les bonnes valeurs) que $y = 0,3 e^{-0,05 t}$.

- a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$. Donner une justification concrète à ce résultat.

CORRECTION : Quand $t \rightarrow +\infty$...

- $-k \cdot t \rightarrow -\infty$
- $e^{-0,05t} \rightarrow 0$
- $y(t) \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

Ce qui signifie qu'au bout d'un temps assez long, tout le saccharose aura disparu.

- b) Donner la valeur de $t_{95\%}$, c'est à dire le temps nécessaire pour que 95 % du saccharose présent initialement ait disparu.

CORRECTION : Tracer la courbe sur la calculatrice est une possibilité. Je propose une solution par le calcul.

Quand 95 % du saccharose initial a disparu, il en reste 5 %, donc on cherche à résoudre :

$$y(t) = 5\% \times y(0) \Leftrightarrow 0,3e^{-0,05t} = 0,05 \times 0,3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,05t} = 0,05 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow -0,05t = \ln(0,05) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,05} \ln(0,05) \approx 59,91 \text{ j} \quad (4)$$

REMARQUE : Dans cette partie, la constante de vitesse est $k = 0,05 \text{ j}^{-1}$. Cette grandeur est caractéristique et c'est elle qui fixe les différents temps utiles. Pour obtenir un temps avec k il faut calculer $\frac{1}{k} = 20 \text{ j}$. On appelle cela la constante de temps τ . Pour une réaction du premier ordre comme celle-ci, on sait que $t_{95\%} \approx 3\tau$. On voit que cela donne directement le résultat (ce 3 n'a rien de mystérieux : dans le calcul précédent, $-\ln(0,05) \approx 3$, c'est de là que cela vient)

Vous êtes libre de la méthode : calcul, graphique, calculatrice...

II Probabilités

Dans un laboratoire, deux machines A et B peuvent tomber en panne. Pour un jour pris au hasard, on considère les événements suivant :

- A : « la machine A fonctionne normalement. »
- B : « la machine B fonctionne normalement. »

Vous pourrez utiliser des notations comme $\bar{A}$ mais vous n'utiliserez pas d'autres nom pour les événements (vous devez utiliser A et B).

On a observé que :

- la machine A fonctionne normalement 80 % du temps,
- la machine B fonctionne normalement 90 % du temps,
- les deux machines sont toutes les deux en panne 5 % du temps.

- a) Faites un arbre ou un tableau pour représenter cette situation (ici un tableau est plus simple)

CORRECTION : Ici un arbre serait assez compliqué car on ne nous donne aucune probabilité conditionnelle. Un tableau est préférable de loin.

	A	$\bar{A}$	Total
B	75 %	15 %	90 %
$\bar{B}$	5 %	5 %	10 %
Total	80 %	20 %	100 %

- b) Donner la probabilité que A soit en panne sachant que B l'est.

CORRECTION :

$$p_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,05}{0,20} = 0,25 = 25\%$$

c) Les deux événements sont-ils indépendants ?

CORRECTION : Deux réponses possibles.

- $p(\overline{A}) = 20\% \neq p_{\overline{B}}(\overline{A})$. Donc, le fait d'avoir une information sur $\overline{B}$ (donc sur B) change la proba de $\overline{A}$ (donc de A) et donc les deux événements ne sont pas indépendants.
- $p(A) \times p(B) = 0,8 \times 0,9 = 0,72 \neq p(A \cap B) = 0,75$ et donc les deux événements ne sont pas indépendants.

d) Donner la probabilité que, sachant qu'au moins une machine est en panne, la deuxième l'est également.

CORRECTION : Celle-ci n'est pas simple et était juste pour le fun...

« Au moins une machine en panne » se traduit par $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Si, sachant qu'une machine est en panne, l'autre l'est, c'est que les deux sont en panne, donc $\overline{A} \cap \overline{B}$.

La probabilité recherchée est alors :

$$p = \frac{p(\overline{A} \cap \overline{B})}{p(\overline{A} \cup \overline{B})} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$$

Autrement dit, si une machine est en panne, on a 20 % de chance que la deuxième le soit.