

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Fonction logarithme

I. Définition

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]0; +\infty[\Rightarrow$ il doit exister une fonction f telle que $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$ et :

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$

Attention : La fonction logarithme népérien est notée $\ln$ avec un ℓ (*On peut facilement confondre avec un i...*)

Dans les logiciels, on utilise la notation anglaise : $\log$.

Exercice 1 : ensembles de définition

Donnez l'ensemble de définition des fonctions :

a) $x \mapsto \ln(2x + 1)$

b) $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

Exemple : $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. On reconnaît $\ln(u)$ avec $u = x^2 + 1$, donc :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Exercice 2 : calculs de dérivées

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x - 2 - 2 \ln x$

b) $f(x) = x \cdot \ln x - x$

c) $f(x) = \ln(3x)$

d) $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$

Tableau de variations

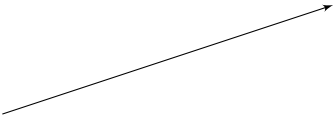
x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		
$f = \ln$		

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
$f = \ln$		

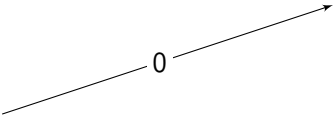
- $0 < x \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x}$ donc $f'(x)$ toujours positif

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
$f = \ln$		

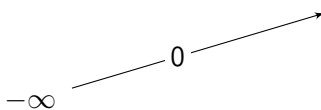
- $0 < x \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x}$ donc $f'(x)$ toujours positif
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissante

Tableau de variations

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	
$f = \ln$			

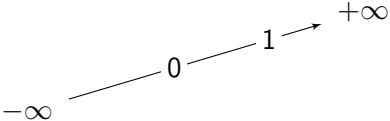
- $0 < x \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x}$ donc $f'(x)$ toujours positif
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissante
- Par définition que $f(1) = \ln(1) = 0$

Tableau de variations

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	
$f = \ln$			$+\infty$

- $0 < x \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x}$ donc $f'(x)$ toujours positif
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissante
- Par définition que $f(1) = \ln(1) = 0$
- limites sont infinies (*Admis*)

Tableau de variations

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+		
$f = \ln$				

- $0 < x \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x}$ donc $f'(x)$ toujours positif
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissante
- Par définition que $f(1) = \ln(1) = 0$
- limites sont infinies (*Admis*)
- Il existe un réel e tel que $\ln(e) = 1$.

ln ne change pas l'ordre

ln $\nearrow$ donc ln **conserve l'ordre**.

Avec $A > 0$ et $B > 0$ on a :

- $A = B \Leftrightarrow \ln A = \ln B$
- $A \leq B \Leftrightarrow \ln A \leq \ln B$
- $A < B \Leftrightarrow \ln A < \ln B$

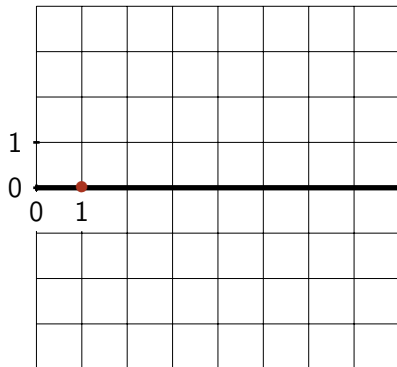
Exercice 3 : résoudre

a) $\ln(x + 4) = \ln(3x - 5)$

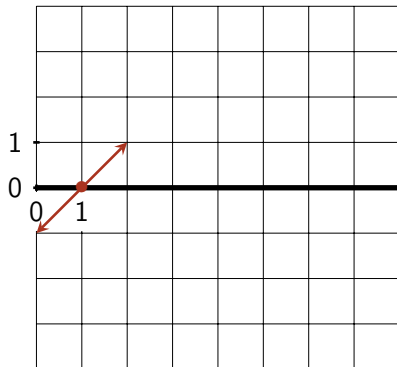
b) $\ln(x + 4) > 0$

c) $\ln(4x - 12) = 1$

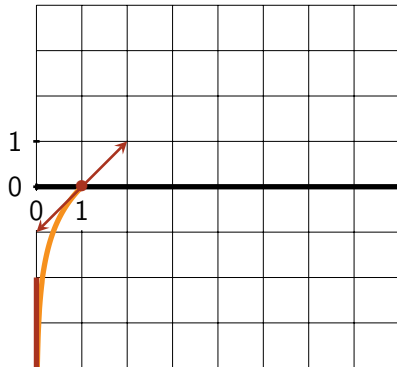
- $\ln 1 = 0$



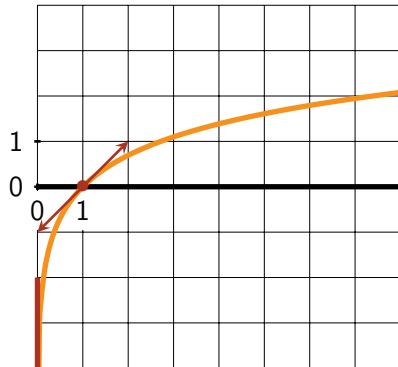
- $\ln 1 = 0$
- $\ln' 1 = 1$



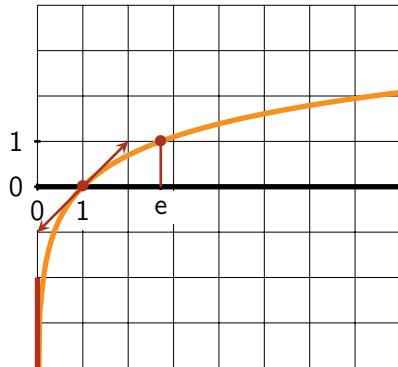
- $\ln 1 = 0$
- $\ln' 1 = 1$
- $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$



- $\ln 1 = 0$
- $\ln' 1 = 1$
- $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$
- ...



- $\ln 1 = 0$
- $\ln' 1 = 1$
- $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$
- ...
- $e \approx 2,7$



x^n l'emporte sur $\ln(x)$.

Exemple : $f(x) = 3x \ln(x)$

x^n l'emporte sur $\ln(x)$.

Exemple : $f(x) = 3x \ln(x)$

- En $+\infty$, $3x \rightarrow +\infty$ et $\ln(x) \rightarrow +\infty$.
Aucun problème. $f(x) \rightarrow +\infty$.
- En 0, $3x \rightarrow 0$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$.
Indéterminé.
 $3x$ l'emporte, donc $f(x) \rightarrow 0$.

II. Règles de calcul

Invention par John Napier

John Napier (1550 – 1617), un mathématicien écossais, a créé une table mettant en relation des sommes et des produits. Il s'agissait de simplifier les calculs, notamment en astronomie, à cette époque où tous les calculs étaient faits à la main...



log = logos = relation ; arithme = arithmeticos = nombre

On a eu tendance à franciser en Jean Neper.

À l'origine des logarithmes, on n'a pas la notion de dérivée (*n'existe pas avant Newton, donc 100 ans plus tard*) mais une règle de calcul :

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Preuve de $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

Pour ceux que cela intéresse...

Je montre ici, en gros, comment on passe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ à $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Soit $f(x) = \ln(a \cdot x)$ avec a et x positifs.

$f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Donc $f'(x) = \ln'(x)$. Donc $f(x) = \ln(x) + c$, où c ne dépend pas de x mais peut dépendre de a .

Pour $x = 1$, on a donc $f(1) = \ln(a) = \ln(1) + c = c$. Donc $c = \ln(a)$.

Conclusion : pour tout a et x positifs, $\ln(a \cdot x) = \ln(a) + \ln(x)$.

Il suffit de remplacer x par b et on a la propriété voulue.

De cette loi on déduit toutes les autres comme $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$.

Pour a et b réels > 0 et n un entier
(*mais c'est juste aussi si n est un réel !*)

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(a)$

Exercice 4 : simplifier

a) $\ln(8) - \ln(4)$

b) $\ln(12 \cdot e)$

c) $\ln(15^2) - 2 \ln(3)$

d) $\ln(\sqrt{e})$

Exercice 5 : résoudre

a) $5 \cdot (1,03)^n \geq 100$

b) $85 \cdot (0,95)^n \leq 1$

III. Logarithme de base 10

Soit $x = 46\,962\,125$. Je désire encadrer x de la façon suivante :

$$10^n \leq x < 10^{n+1}$$

Comment faire ?

Soit $x = 46\,962\,125$. Je désire encadrer x de la façon suivante :

$$10^n \leq x < 10^{n+1}$$

Comment faire ?

Solution : on prend le logarithme népérien...

$$\ln(10^n) \leq \ln(x) < \ln(10^{n+1}) \Leftrightarrow n \cdot \ln(10) \leq \ln(x) < (n+1) \cdot \ln(10)$$

et on divise par $\ln(10)$

$$n \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \log(x) < n+1$$

Comme $\log(x) \approx 7,7$, alors $10^7 \leq x < 10^8$.

Définition de log

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Est le logarithme de base 10.

Dans les logiciels, on écrit souvent $\log_{10}$.

Exercice 6 : décibels

On utilise en physique une échelle de puissance en **décibels**.

On utilise jamais le bel.

$$P_{bel} = \log P \Rightarrow P_{dB} = 10 \cdot \log P$$

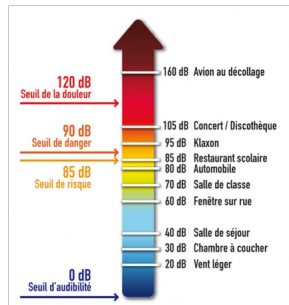
Sur le graphique ci-contre, la puissance du bruit d'un avion au décollage est

$$P_{avion}(dB) = 160 \text{ dB}.$$

La puissance du bruit d'une fenêtre sur rue est

$$P_{rue}(dB) = 60 \text{ dB} ?$$

Quel est le rapport $\frac{P_{avion}}{P_{rue}}$.



Exercice 7 : $pH = \text{potentiel Hydrogène}$

Par définition, $pH = -\log[H^+]$.

Si on calcule $\ln(x)$ ou $\log(x)$ ou $\exp(x)$... Il faut que x soit sans unités. Mais ici, $[H^+]$ a l'unité $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et dans l'exercice précédent P était en W ... Si on voulait être parfaitement rigoureux, il faudrait écrire :

$$pH = -\log\left(\frac{[H^+]}{1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}\right)$$

Mais c'est inutilement lourd et on ne le fait jamais.

- 1) Quel est le pH d'une solution dont la concentration $[H^+]$ est $2,3 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$?
- 2) Deux solutions A et B ont respectivement un pH de 3 et un pH de 5. Laquelle à la plus grande concentration $[H^+]$?
- 3) Est-il possible que $pH = -0,1$?