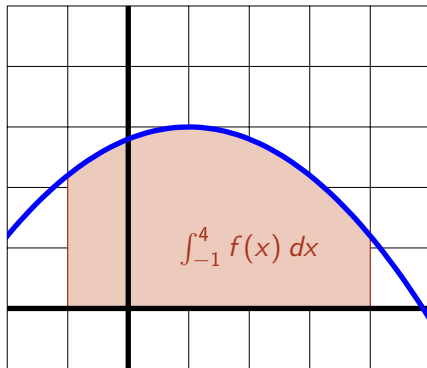
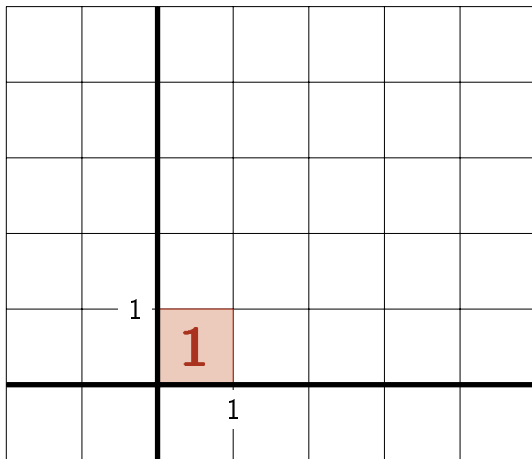




Intégration

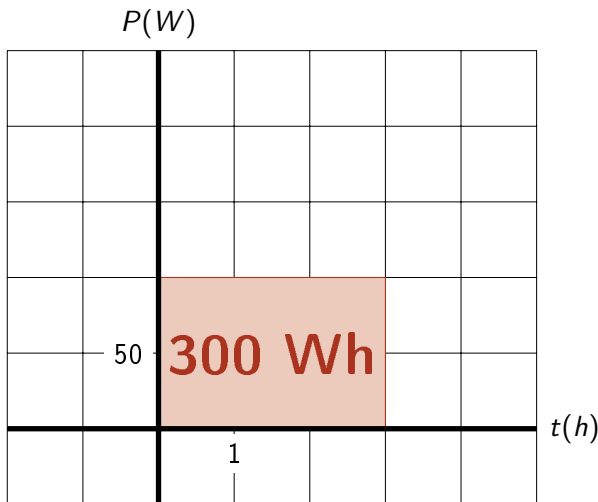
I. Calcul d'aire

I. 1) Unité d'aire



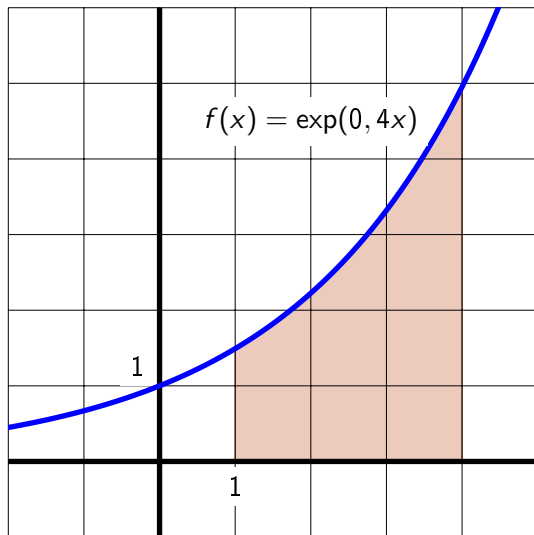
L'unité d'aire de ce repère est donnée par le carré.

Avec des unités

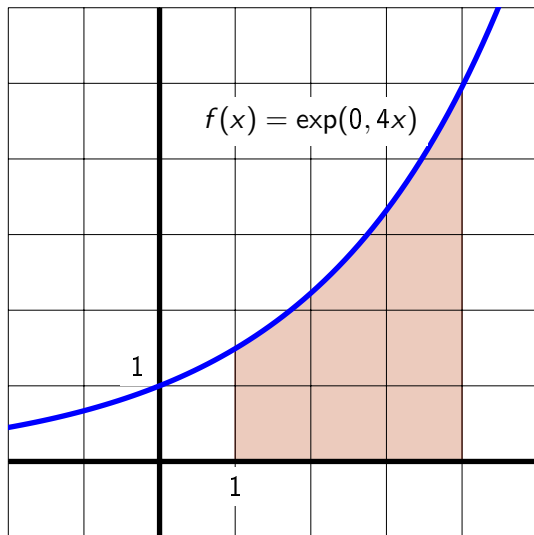


Le rectangle a une aire de $3h \times 100W = 300Wh$

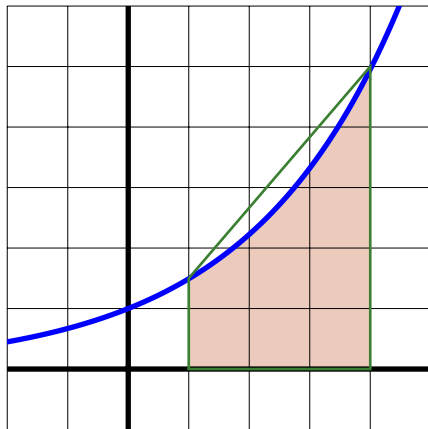
I. 2) Problème : Donner l'aire sous la courbe



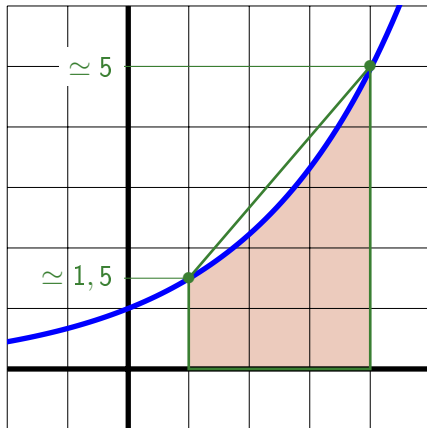
I. 2) Problème : Donner l'aire sous la courbe



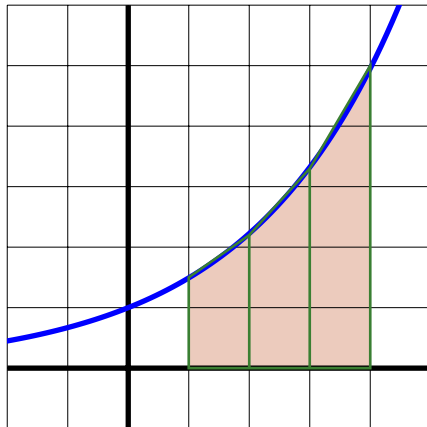
Estimation grossière : $\simeq 8$ ou $9ua$



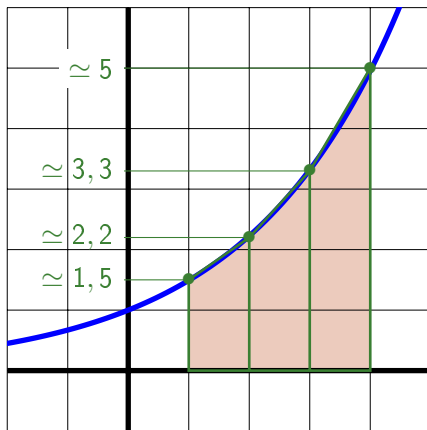
La zone ressemble un peu à un trapèze. On détermine l'aire de ce trapèze en repérant les coordonnées des coins.



Aire du trapèze ainsi tracé : $3 \times \frac{1,5+5}{2} = 9,75$ (pas bonne approx)

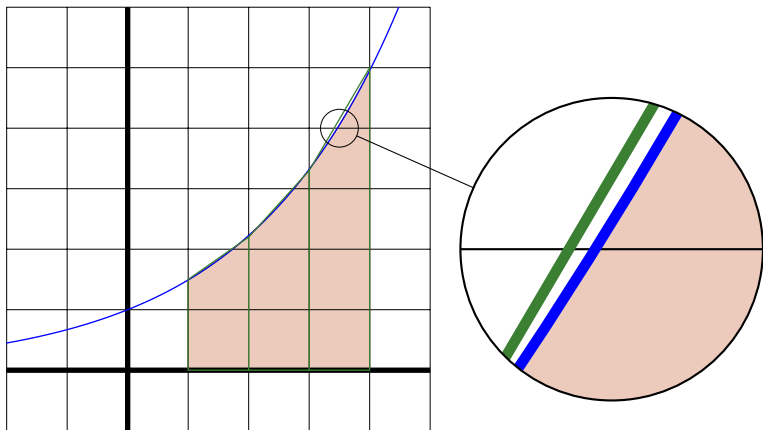


On peut mieux faire en découpant la zone en trapèzes plus petits.



Aire des 3 trapèzes ainsi tracés : $\frac{1,5+2,2}{2} + \frac{2,2+3,3}{2} + \frac{3,3+5}{2} = 8,75$ (bonne approx)

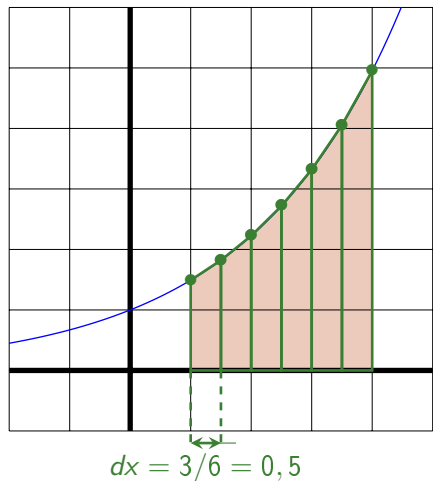
Si on y regarde de plus près, on voit que nos trapèzes sont encore trop grands.



On peut découper plus, par exemple en six :

Avec une calculatrice...

x	$f(x)$
1	1,49
1,5	1,82
2	2,23
2,5	2,72
3	3,32
3,5	4,06
4	4,95



$$\mathcal{A} \simeq 0,5 \times \frac{1,49 + 1,82}{2} + \dots$$

$$\mathcal{A} \simeq 8,685$$

On voudrait augmenter aussi grand que possible le nombre de trapèze.
On peut utiliser un algorithme :

```
1  $S = 0$   
2  $N = 300$   
3  $dx = 3/N$   
4 pour  $k$  allant de 0 à  $N - 1$  faire  
5    $x \leftarrow 1 + k \cdot dx$   
6    $S \leftarrow S + dx \cdot \frac{f(x) + f(x+dx)}{2}$   
7 fin  
8 Renvoyer  $S$ 
```

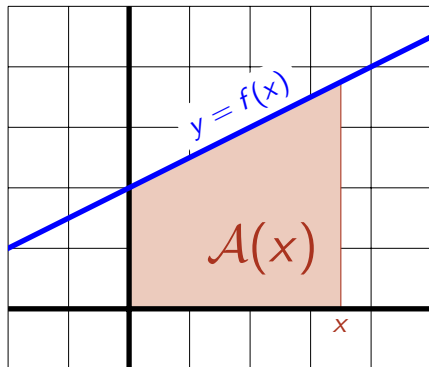
On voudrait augmenter aussi grand que possible le nombre de trapèze.
On peut utiliser un algorithme :

```
1  $S = 0$   
2  $N = 300$   
3  $dx = 3/N$   
4 pour  $k$  allant de 0 à  $N - 1$  faire  
5    $x \leftarrow 1 + k \cdot dx$   
6    $S \leftarrow S + dx \cdot \frac{f(x) + f(x+dx)}{2}$   
7 fin  
8 Renvoyer  $S$ 
```

Retour : 8.653030854

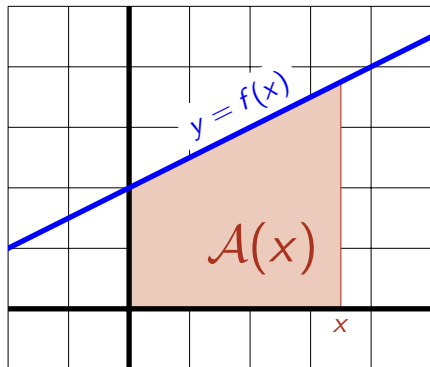
Les 4 premières décimales sont justes !

I. 3) Un lien avec la primitive



Déterminons l'expression de $A(x)$,
aire de la zone en rouge, avec
 $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

I. 3) Un lien avec la primitive

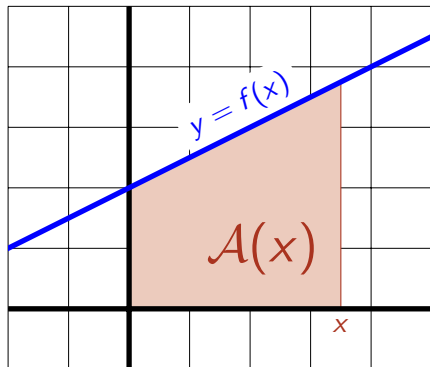


Déterminons l'expression de $A(x)$,
aire de la zone en rouge, avec
 $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

$$A(x) = x \cdot \frac{f(0) + f(x)}{2} = 2x + \frac{x^2}{4}$$

On remarque...

I. 3) Un lien avec la primitive



Déterminons l'expression de $A(x)$,
aire de la zone en rouge, avec
 $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

$$A(x) = x \cdot \frac{f(0) + f(x)}{2} = 2x + \frac{x^2}{4}$$

On remarque...

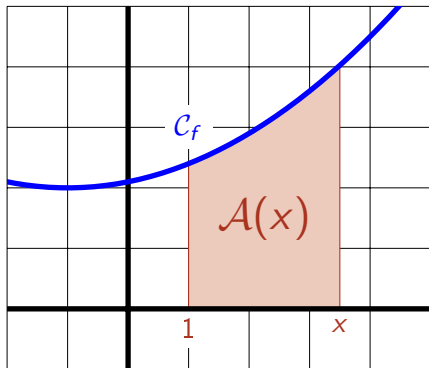
$$A'(x) = f(x)$$

A est une primitive de f .

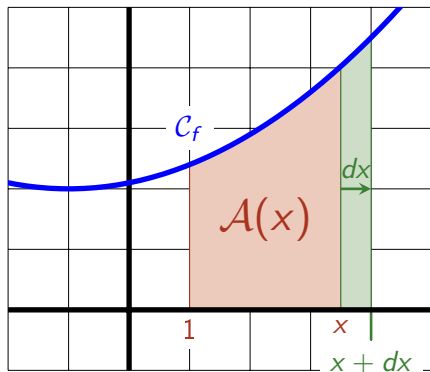
Ce n'est pas un hasard !

I. 4) Aire sous une courbe : principe de la démonstration

Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.



I. 4) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



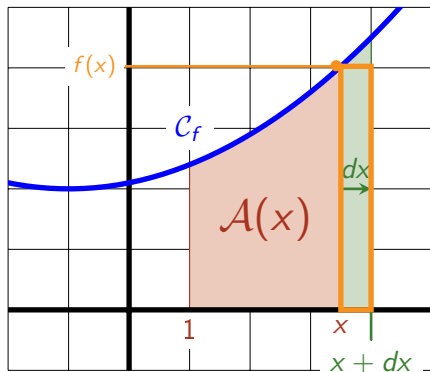
Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

On cherche $\mathcal{A}(x + dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f **croissante**,
continue et **positive** sur $[x; x + dx]$

I. 4) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

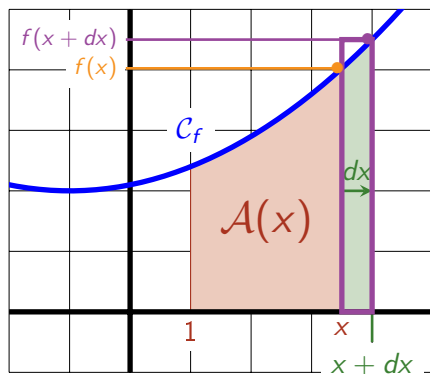
On cherche $\mathcal{A}(x + dx)$.

Soit dA l'aire de la zone en vert.

On va supposer f croissante,
continue et positive sur $[x; x + dx]$

- $dx \cdot f(x) \leq dA$

I. 4) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

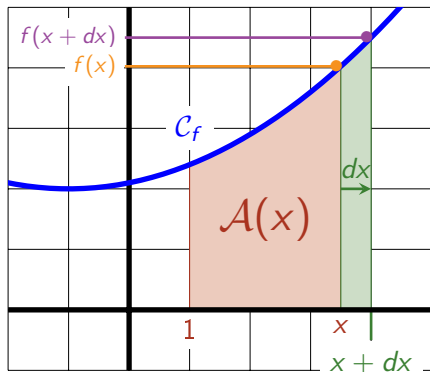
On cherche $\mathcal{A}(x+dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f croissante,
continue et positive sur $[x; x+dx]$

- $dx \cdot f(x) \leq d\mathcal{A}$
- $d\mathcal{A} \leq dx \cdot f(x+dx)$

I. 4) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

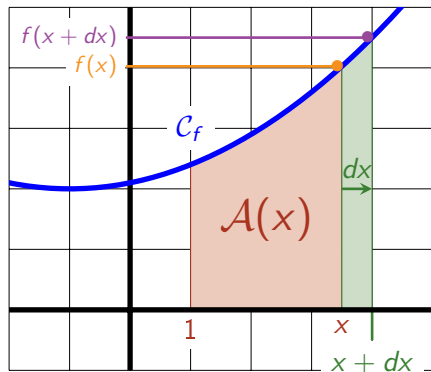
On cherche $\mathcal{A}(x + dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f croissante,
continue et positive sur $[x; x + dx]$

- $dx \cdot f(x) \leq d\mathcal{A}$
- $d\mathcal{A} \leq dx \cdot f(x + dx)$
- Donc $f(x) \leq \frac{d\mathcal{A}}{dx} \leq f(x + dx)$

I. 4) Aire sous une courbe : principe de la démonstration



On en déduit, quand $dx \rightarrow 0$:

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

Soit $\mathcal{A}(x)$, l'aire de la zone en rouge.

On cherche $\mathcal{A}(x + dx)$.

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire de la zone en vert.

On va supposer f croissante,
continue et positive sur $[x; x + dx]$

- $dx \cdot f(x) \leq d\mathcal{A}$
- $d\mathcal{A} \leq dx \cdot f(x + dx)$
- Donc $f(x) \leq \frac{d\mathcal{A}}{dx} \leq f(x + dx)$

Continuité utile pour que $f(x + dx) \rightarrow f(x)$ quand $dx \rightarrow 0$

II. Intégrale

II. 1) Définition

f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Avec F une primitive de f .

N'importe quelle primitive, ça ne change rien !

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x + 1) dx$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x + 1) dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x + 1$

$$F(x) =$$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x + 1) dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x + 1$

$$F(x) = x^2 + x$$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x + 1) dx$

- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x + 1$

$$F(x) = x^2 + x$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^5 (2x + 1) dx &= [x^2 + x]_1^5 \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Exemple

On cherche $\int_1^5 (2x + 1) dx$

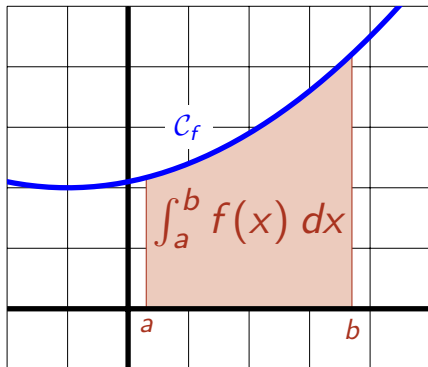
- Il faut trouver $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = 2x + 1$

$$F(x) = x^2 + x$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^5 (2x + 1) dx &= [x^2 + x]_1^5 \\ &= (5^2 + 5) - (1^2 + 1) \\ &= 28\end{aligned}$$

II. 2) Calcul de l'aire



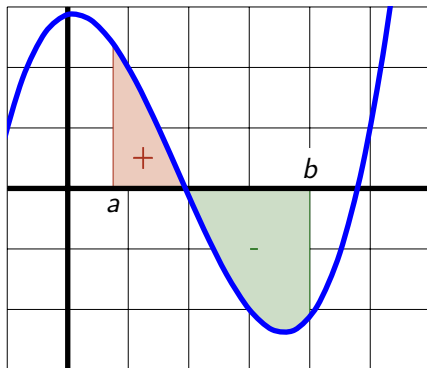
C_f est la courbe de f dans un repère orthogonal.

L'aire sous la courbe entre a et b est :

$$\int_a^b f(x) dx$$

intégrale de f entre a et b .

Cas d'une fonction négative

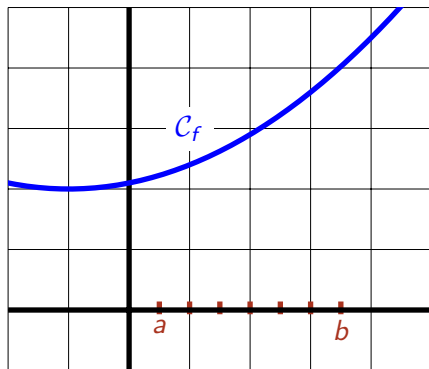


Quand on calcule $\int_a^b f(x) dx$ l'aire au-dessus (en rouge) est comptée en plus, l'aire en-dessous (en vert) est comptée en moins.

II. 3) Sens de la notation

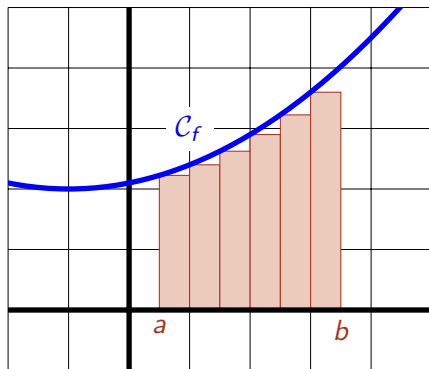
On pourrait approcher le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ de cette façon :

- On découpe l'intervalle $[a; b]$ en N tranches (ici $N = 6$)



II. 3) Sens de la notation

On pourrait approcher le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ de cette façon :

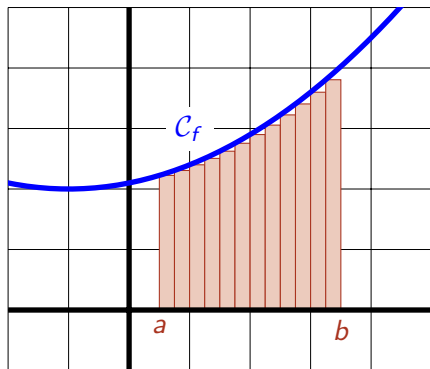


- On découpe l'intervalle $[a; b]$ en N tranches (ici $N = 6$)
- On calcule la **somme** des aires des rectangles (*voir figure*)

Chaque rectangle a une aire $f(x) \times dx$, la somme est $\sum f(x)dx$

II. 3) Sens de la notation

On pourrait approcher le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ de cette façon :



- On découpe l'intervalle $[a; b]$ en N tranches (ici $N = 6$)
- On calcule la **somme** des aires des rectangles (*voir figure*)

Chaque rectangle a une aire $f(x) \times dx$, la somme est $\sum f(x) dx$

- On découpe de plus en plus fin, $N \rightarrow +\infty$, alors

$$\sum f(x) dx \rightarrow \int f(x) dx$$

$\int$ représente donc une **Somme**.

II. 4) Moyenne

En statistiques :

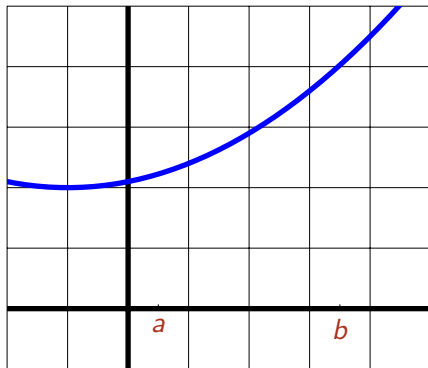
- En général, les N individus ont des valeurs différentes x_i .
- Le total est $\sum_i x_i$
- Si tous les individus avaient la même valeur $\bar{x}$, le total serait inchangé.

$$N \cdot \bar{x} = \sum_i x_i \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

II. 4) Moyenne

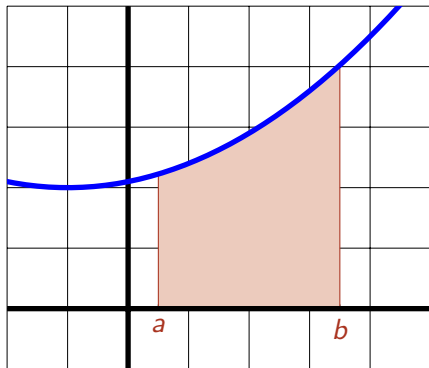
On raisonne de même sur l'intervalle $[a; b]$.

- $f(x)$ varie.



II. 4) Moyenne

On raisonne de même sur l'intervalle $[a; b]$.

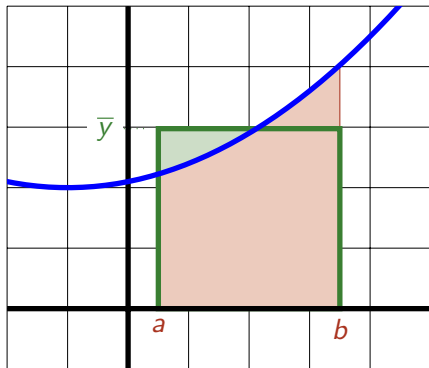


- $f(x)$ varie.
- Le total des $f(x)$ est l'aire

$$\int_a^b f(x) dx$$

II. 4) Moyenne

On raisonne de même sur l'intervalle $[a; b]$.



- $f(x)$ varie.
- Le total des $f(x)$ est l'aire $\int_a^b f(x) dx$
- Si l'aire $f(x)$ était constante, on pourrait avoir la même aire totale.

$$(b-a) \cdot \bar{y} = \int_a^b f(x) dx$$
$$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$