

Exercice 1 : calculs d'intégrales

a) $\int_0^8 x \, dx$

c) $\int_3^5 (3x^2 - 4x + 1) \, dx$

b) $\int_{-1}^3 (-2x + 10) \, dx$

d) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) \, dx$

Exercice 2 : calculs d'intégrales

a) $\int_2^3 (x - 2) \, dx$

f) $\int_{-1}^1 (2e^x + 1) \, dx$

b) $\int_0^3 (2x^2 - x + 3) \, dx$

g) $\int_{-\frac{1}{3}}^0 (1 - e^{3t}) \, dt$

c) $\int_3^4 dx$

h) $\int_{\ln(2)}^{\ln(4)} e^x \, dx$

d) $\int_{-1}^0 3 \, dx$

i) $\int_{\frac{3}{1}}^5 \frac{1}{2t - 1} \, dt$

e) $\int_1^2 \left(x + 1 + \frac{2}{x} \right) \, dx$

j) $\int_1^2 (x + 1)(x^2 + 2x + 3) \, dx$

Exercice 3 : Moyenne

À l'aide d'une perfusion, on injecte pendant cinq minutes un médicament antalgique à un patient. Après l'injection, l'organisme élimine peu à peu le médicament.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient au cours du temps. L'instant $t = 0$ correspond au début de l'injection.

On fait l'hypothèse qu'à l'instant t , exprimé en minute, la quantité de médicament exprimée en millilitre, est égale à $f(t) = 0,2te^{-0,2t}$.

a) Déterminer graphiquement, à une minute près, l'instant à partir duquel la quantité de médicament redevient inférieure à 0,05 ml.

b) On considère la fonction F définie par $F(t) = (-t - 5)e^{-0,2t}$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .

c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 23]$.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près.

Que représente cette valeur moyenne dans le contexte de l'exercice ?

Exercice 4 : Contamination

On se propose d'étudier ici la contamination d'un cours d'eau par un polluant.

Le temps t est exprimé en semaine. La quantité de polluant émise dans l'eau est donnée par la fonction $p(t) = 3e^{-t}$ exprimée en milligramme par litre et par semaine.

On notera $y(t)$ (ou simplement y) la quantité de polluant présent dans l'eau. y est en milligramme par litre. On suppose que $y(0) = 0$.

$p(t)$ correspond à l'ajout de polluant mais une partie de ce polluant se dégrade naturellement si bien que l'on pose le modèle suivant :

$$(E) : y' + 0,25y = p(t)$$

Où le membre de gauche exprime la dégradation naturelle.

- 1) Quelle est l'unité de 0,25 dans l'équation (E) ? Déduisez-en un temps caractéristique du problème.
- 2) Équation différentielle :
 - a) Donner la solution générale y_0 de $(E_0) : y' + 0.25y = 0$
 - b) Montrer que $y_1 = -4e^{-t}$ est solution de (E).
 - c) Donner l'expression de la solution générale de (E).
 - d) Donner la solution de (E) vérifiant la condition initiale.
- 3) On considère que le cours d'eau est pollué quand on a plus de 0,1 mg/L de polluant. Combien de temps va durer la pollution ?
- 4) Calculer la quantité totale de polluant déversé dans le cours d'eau, en milligramme par litre, au cours de la première année (52 semaines)
- 5) Calculer la quantité moyenne de polluant dans le cours d'eau au cours de la première année.