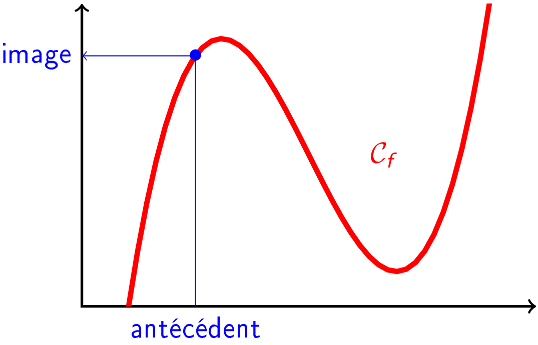
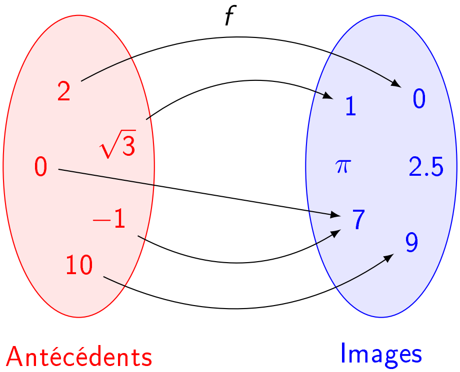
# Fonctions




$f$ : antécédent $\mapsto$ image

# I. Qu'est-ce qu'une fonction ?

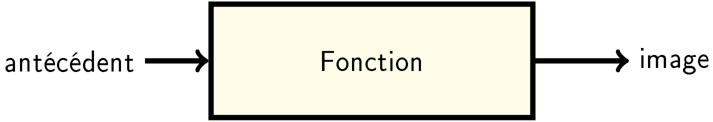
# Association




- On peut noter $f(2) = 0$ ou encore $f : 2 \mapsto 0$.
- 2 est l'**antécédent** de 0 ; 0 est l'**image** de 2.
- L'ensemble des antécédents autorisés est l'**ensemble de définition**.

# Boîte à calcul

Une fonction est comme une boîte qui prend un nombre en entrée (**antécédent**) et renvoie un nombre en sortie (**image**).




- On n'a pas le droit de donner n'importe quel nombre en entrée. Les nombres autorisés forment l'**ensemble de définition** : $\mathcal{D}$.
- Pour un antécédent donné, l'image est toujours la même.
- On note

$$\text{fonction} : \text{antécédent} \mapsto \text{image}$$

# Tableau de valeur

Le lien antécédent $\mapsto$ image peut être donné par un tableau de valeur.

**Exemple avec des pointures de chaussures :**

| Taille du pied (cm) | 28,7 | 29,3 | 29,7 | 30,0 | 30,5 | 30,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pointure | 43 | 44 | 44 | 45 | 46 | 46 |

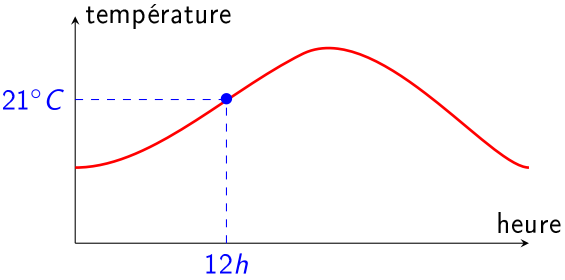
$$p : \text{Taille du pied en cm} \mapsto \text{Pointure}$$

Par exemple, $p(29,3) = 44$ ; $\mathcal{D}_p =???$

Vous avez remarqué que la flèche $\mapsto$ a une forme spéciale. Elle est réservée à cet usage.

# Courbe : abscisse $\mapsto$ ordonnée

**Exemple avec une courbe de température :**




Sur la courbe, on peut associer à l'heure du jour une certaine température.
On a donc une fonction : $T$ : *heure* $\mapsto$ *temprature*.

En sciences, on précise les unités : $T(12h) = 21°C$.

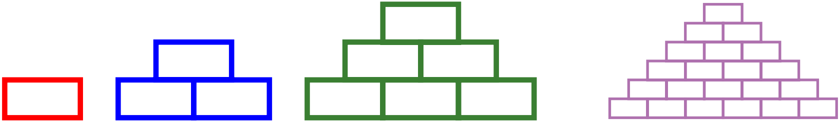
Une courbe est comme un tableau de valeur continu.

# Construction

On se donne une règle liant l'antécédent à l'image.

**Exemple d'une construction de pyramide**

On se donne un nombre d'étage (antécédent) et on veut connaître le nombre de briques nécessaires (image). La règle de construction est donnée par le schéma.



$$f : \text{étages} \mapsto \text{briques}$$

Ici, $f(6) = 21$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$.

# Algorithme et expression

**Un exemple d'algorithme :**

**Entrées :** nombre $x$

**début**

$a \leftarrow x + 1$

$b \leftarrow a^2$

$y \leftarrow a + b - 2$

**renvoyer** $y$

**fin**

Dans cet exemple on voit que si $x$ est l'antécédent, on aura :

$$x \mapsto (x+1)^2 + (x+1) - 2$$

On note aussi $f(x) = (x+1)^2 + (x+1) - 2$.

$f$ est la fonction, $f(x)$ est un nombre, c'est l'image.

Néanmoins, on fait souvent la confusion $f$, $f(x)$, notamment en physiques.

# Fonctions à plusieurs variables en physiques

En physique, il est banal de rencontrer des fonctions à plusieurs antécédents. Par exemple :

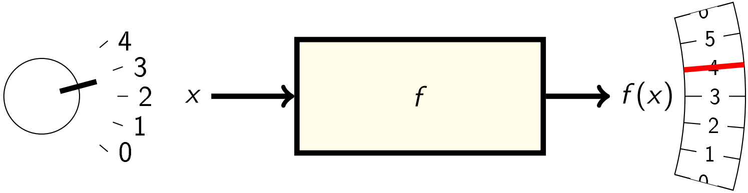
$$f : x, y \mapsto x^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

Ou encore $f(x, y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y$. Mais les physiciens ont tendance à ne pas préciser les $(x, y)$ et on verra écrit :

$$f = x^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

La plupart des formules de physiques ont cette forme, comme $U = R \cdot I$.

# II. Variations

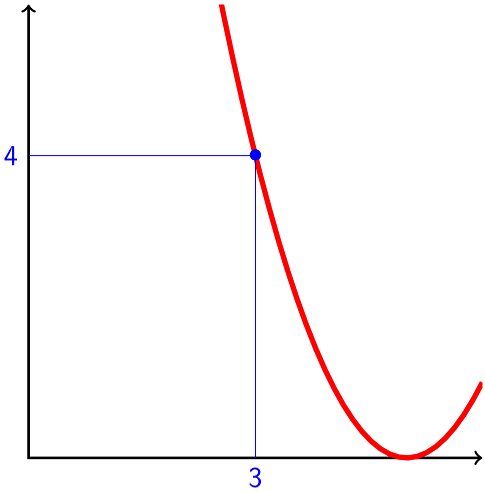



On veut savoir comment change $f(x)$ si on change $x$.

Par exemple, $f : x \mapsto x^2 - 10x + 25$. On a $f(3) = 4$. Si on augmente un peu $x$, est-ce que $f(x)$ va augmenter aussi ? diminuer ?

En gros on veut savoir si « ça monte » ou si « ça descend ». Mais une montée, c'est une descente... Les mots « croître » et « décroître » sont plus précis.

Le tracer de la courbe permet de répondre.



Mais on préfère une représentation encore plus simplifiée : le tableau de variations

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $4$ | $0$ | $+\infty$ |

Le tableau permet de répondre à des questions simples comme : « combien y a-t-il de solutions à $f(x) = 7$ ? »

Les $\infty$ de ce tableau sont des **limites**. $+\infty$ n'est pas un nombre, c'est un concept : devenir aussi grand que l'on veut. Dire $A \to +\infty$ signifie que quelque soit la valeur fixée : $1\,000$, $1\,000\,000$, ... , $A$ devient plus grand.

# Usage dans les inéquations

J'ai une inéquation de forme :

$$A < B$$

Et je sais que $f$ est **strictement croissante**. J'ai alors le droit d'appliquer $f$ des deux côtés de l'inéquation **sans changer le symbole**.

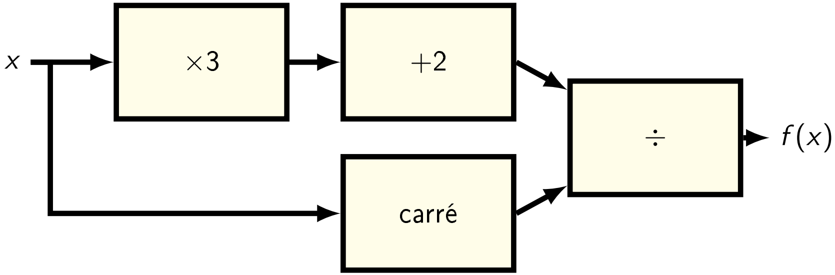
$$A < B \Leftrightarrow f(A) < f(B)$$

$\Leftrightarrow$ *signifie qu'on peut aller dans les deux sens.*

Cela est vrai avec $< \leqslant = \geqslant >$.
Si $f$ **strictement décroissante**, le symbole est **inversé**.

# III. Fonctions de références et composition

Il y a une infinité de fonctions possibles et on ne peut pas les lister toutes. On donne un nom à la vingtaine de fonctions importantes mais la plupart des fonctions étudiées sont des **composition**.




$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2}$$