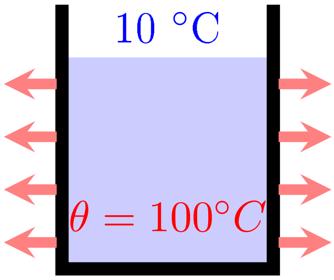
Dérivation partie 2 – exercice 2 – correction

L'expérience



On étudie le refroidissement d'un verre. On veut connaître l'évolution de la température θ en fonction du temps t. Donc notre inconnue est une fonction $\theta(t)$.

- On sait que $\theta(0) = 100$,
- on se doute que $\theta(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 10$,
- on se doute que $\theta \searrow$

Le modèle

Pour prédire **théoriquement** l'expression de $\theta(t)$ on essaie de faire des hypothèse raisonnables pour obtenir un **modèle**.

> Un modèle est une description théorique, toujours approximative mais plus ou moins précise, d'une situation réelle. Rien ne dit que la nature doive se comporter selon des lois mathématiques, mais nous la décrivons avec des lois mathématiques (des modèles) parce que cela donne de bons résultats.

Pour prédire la forme de $\theta(t)$ on se place à un instant t quelconque, la température est alors θ (il est d'usage d'écrire θ au lieu de $\theta(t)$) et on se donne un très court instant dt. On se demande quelle est la variation $d\theta$ pendant cet instant.

La variation $d\theta$ dépendra du temps dt qu'on se donne, de la température en cours θ, de la température ambiante 10, de la forme du verre, de sa matière...

On propose de supposer que $d\theta$ est proportionnelle à :

- la durée dt qu'on se donne,
- la différence $\theta - 10$. Cette deuxième hypothèse peut sembler tombée de nulle part. Elle se justifie pour deux raisons : les expériences permettent de voir que le liquide se refroidit d'autant plus vite que sa température est loin de la température ambiante ; cela donne un modèle simple. On choisit des hypothèses simples et si elles fonctionnent, on est content.

$$d\theta = -K(\theta - 10)dt$$

La constante K dépend probablement de la forme du verre, sa taille... Une analyse dimensionnelle montre que K est en [unité de t]$^{-1}$.

L'équation différentielle

En divisant des deux côtés par dt on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = K(\theta - 10)$$

C'est une équation différentielle. On a aussi une **condition initiale** : $\theta(0) = 100$.

Notre objectif ici n'est pas de détailler comment on trouve la solution de cette équation. En faisant la résolution on obtiendra :

$$\theta(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-Kt}$$

K est toujours une constante dépendant de la forme du verre, ...

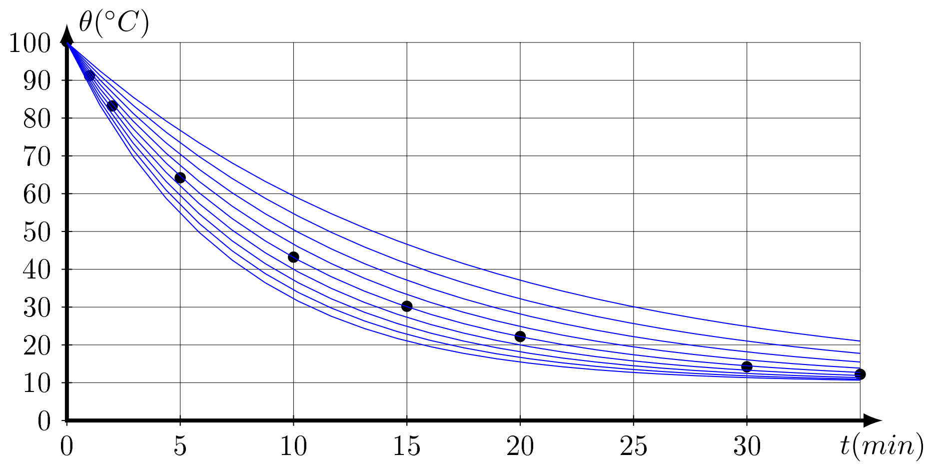
Expérimentation

On souhaite conduire une expérience à la fois pour vérifier la validité du modèle et aussi pour trouver une valeur de K dans un cas particulier.

On fait donc une série de mesure et on obtient :

t en min	0	1	2	5	10	15	20	30	35
$\theta(t)$ en $°C$	100	91	83	64	43	30	22	14	12

On pourrait faire le nuage de point :



Sur le graphique on a tracé la courbe de $\theta(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-Kt}$ avec plusieurs valeurs de K. On souhaite trouver la valeur de K qui convient le mieux.

Bien sûr, on pourrait se contenter de tester quelques valeurs jusqu'à en trouver une bonne. Mais on aimerait une technique plus automatique et donnant une grande précision.

Ajustement

On reconnaît un problème d'ajustement. Comme on pu le dire pendant le cours sur les ajustements, on ne se contente pas de chercher n'importe quel genre de courbe qui passerait proche du nuage de points. On choisit une courbe d'équation $\theta(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-Kt}$ par ce qu'on a de bonnes raisons de le faire.

Nous savons faire un ajustement affine. Dans l'expression, seul le morceau $-K \cdot t$ est affine... On va donc chercher à extraire ce morceau.

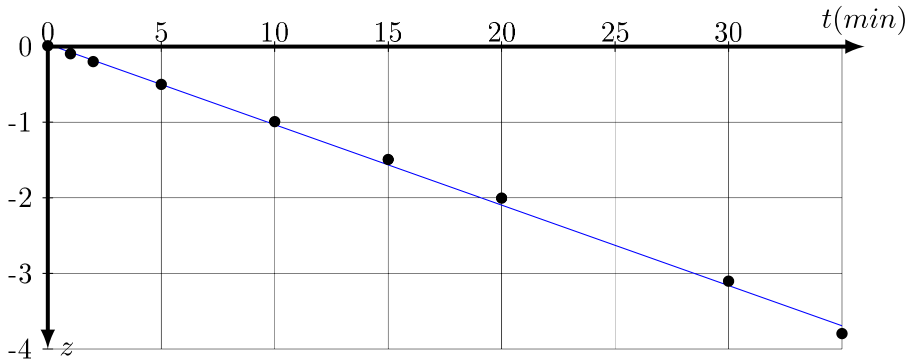
$$\begin{aligned}\theta(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-Kt} &\Leftrightarrow \theta(t) - 10 = 90\mathrm{e}^{-Kt}\\ &\Leftrightarrow \frac{\theta(t) - 10}{90} = \mathrm{e}^{-Kt}\\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\theta(t) - 10}{90}\right) = -Kt\end{aligned}$$

On décide de noter $z = \ln\left(\frac{\theta(t)-10}{90}\right)$ et donc, selon notre modèle, $z = -K \cdot t$.

Faisons le calcul des z :

t en min	0	1	2	5	10	15	20	30	35
$\theta(t)$ en $°C$	100	91	83	64	43	30	22	14	12
z	0	-0,1054	-0,2094	-0,5108	-1,0033	-1,5041	-2,0149	-3,1135	-3,8067

On peut tracer le graphique de z en fonction de t et faire l'ajustement affine :



On trouve avec une calculatrice

$$z = -0,1064t + 0,0313$$

Notre modèle demandait $z = -K \cdot t$. Ici, le $0,0313$ relève de l'erreur liée aux erreurs de mesures et $K = 0,1064\, min^{-1}$.

Si on décidait que $z = -0,1064t + 0,0313$ ce la entraînerait que $\theta(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-0,1064t+0,0313}$ et donc que $\theta(0) \approx 102,86°C$. On pourrait chercher le meilleur ajustement qui impose $\theta(0) = 100°C$, c'est à dire obliger l'ajustement de z à passer par le premier point. C'est possible avec un tableur, par exemple Excel. Alors on obtient $z = -0,1051t$.

Plus loin...

Cette expérience confirme notre modèle. $\theta(t)$ semble avoir la forme prévue. On n'a pas spécialement intérêt à compliquer le modèle.

Notre modèle repose sur la connaissance d'une quantité K. Cela signifie que je ne peux pas faire de prédiction tant que je ne connais pas K. Si j'utilise un nouveau récipient, il faudra d'abord que je fasse une série de mesure pour déterminer la valeur de K correspondant à ce récipient particulier.

On pourrait chercher un modèle théorique qui nous permettrait de calculer K en fonction des caractéristiques du récipient. On pourrait commencer par faire des séries de mesures dans les quelles on mesurerait K pour plusieurs diamètres D. On pourrait obtenir un fonction $K = f(D)$. Mais la fonction contiendrait d'autres paramètres à déterminer et qui dépendrait de la matière, de l'épaisseur... On pourrait continuer ainsi à affiner le modèle jusqu'à être capable de calculer K rien qu'en connaissant les caractéristiques du récipient.