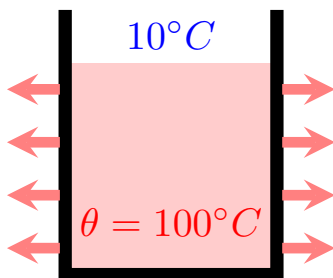


Équations différentielles

Exemple physique



L'eau dans le verre commence à 100°C . On devine que l'eau se refroidit jusqu'à atteindre la température ambiante de 10°C .

On désire prédire l'évolution de la température dans le verre, c'est à dire que l'on veut connaître la fonction $t \mapsto \theta(t)$.

Pour construire notre modèle, on pose des hypothèses.

- À l'instant t , la température est θ , En général on ne précise pas $\theta(t)$
- pendant le délai dt , la température varie de $d\theta$, c'est à dire que $\theta(t + dt) = \theta(t) + d\theta$,
- on suppose que $d\theta$ est proportionnel à dt ,
- quand $\theta = 10^{\circ}\text{C}$, l'eau ne refroidit plus et quand $\theta = 100^{\circ}\text{C}$, elle refroidit vite.

Cela conduit à l'hypothèse que $d\theta$ est proportionnel à $\theta - 10$.



Les hypothèses faites sont toujours discutables. Seule l'expérience permettra de juger : on raisonne sur ces hypothèses, on obtient un résultat et si le résultat est assez proche de l'expérience alors les hypothèses sont confirmées. D'autres hypothèses pourraient donner de bons résultats mais, pour une précision donnée, on préfère choisir le modèle le plus simple.

Les hypothèses aboutissent à :

$$d\theta = -\alpha \cdot (\theta - 10) \cdot dt \Rightarrow \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -\alpha \cdot (\theta - 10)$$

- θ et θ' sont des fonctions de t mais en physiques on allège en n'indiquant pas (t) .
- α constante de proportionnalité qui dépendra de beaucoup de choses : nature du liquide, structure du récipient, forme... C'est l'expérience qui nous donne α ,
- – parce que l'on suppose que $\theta \searrow$. Cela permet de choisir $\alpha > 0$, on préfère.

$$(E) : \quad \theta' = -\alpha(\theta - 10)$$

(E) est une **équation différentielle**, c'est à dire une équation dont l'inconnue est une fonction et où cette fonction inconnue apparaît avec ses dérivée (ici θ').

Une équation différentielle comme (E) a une **infinité de solutions**. On pourra sélectionner **la** solution correspondant à l'expérience à l'aide d'une contrainte supplémentaire : ici on sait que $\theta(0) = 100$. On parle de **condition initiale**.

Méthode de Euler

Quand on écrit dt , le d indique que l'on parle d'une variation **infinitésimale** c'est à dire que $dt \rightarrow 0$. On ne peut donc pas attribuer une valeur définie à dt et $d\theta$.

La méthode d'Euler consiste à faire une **approximation** en choisissant une valeur petite pour dt . Plus dt est petit, plus c'est précis mais plus il y aura de calculs. Il faut faire un compromis.

On utilise la formule : $d\theta = -\alpha \cdot (\theta - 10) \cdot dt$.

Exemple : prenons $\alpha = 0,05$. Je choisis $dt = 0,1$.

- $\theta(0) = 100 \Rightarrow d\theta = -0,05 \cdot (100 - 10) \cdot 0,1 = -0,45$. Donc $\theta(0,1) = 100 - 0,45 = 99,55$.
- $\theta(0,1) = 99,55 \Rightarrow d\theta = -0,05 \cdot (99,55 - 10) \cdot 0,1 \approx -0,448$. Donc $\theta(0,2) \approx 99,55 - 0,448 = 99,102$.
- etc.

On peut automatiser cet algorithme sur un ordinateur. Cette méthode continue à être valide même si l'équation différentielle se complique. On ne sait pas résoudre de façon exacte certaines équations différentielles mais on sait produire de bonnes approximations.

Mise en œuvre méthode d'Euler – méthode numérique

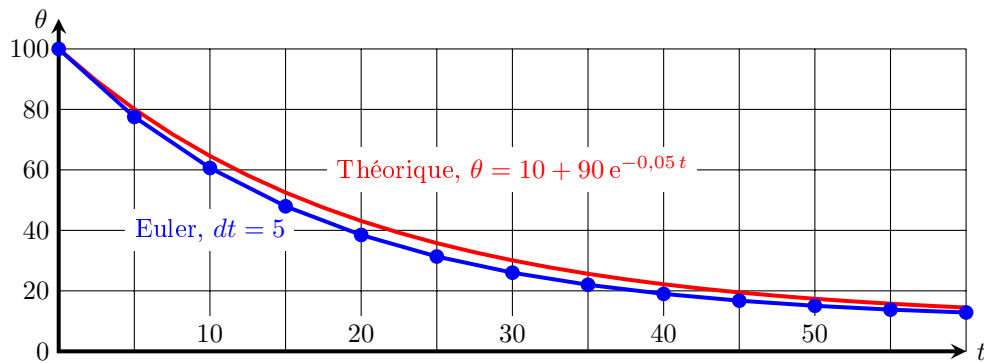
Faisons la résolution numérique de $d\theta = -\alpha \cdot (\theta - 10) \cdot dt$ avec $\theta(0) = 5$, $\alpha = 0,05$ et $dt = 5$.

$dt = 5$ est très mauvais car l'approximation suppose $dt \rightarrow 0$. Pourtant, pour ce genre d'équation, la méthode d'Euler fonctionne très bien et on obtient un résultat pas trop mauvais.

Ci-contre une solution très simple avec un tableur. Il suffit d'étendre les formules des colonnes B et C.

	A	B	C
1	t	theta(t)	theta'(t)
2	0	100	= -0.05 * (B2-10)
3	5	= B1 + C1 * 5	
4	10		
5	15		
6	20		
7	25		
8	30		
9	35		
10	40		

On obtient la courbe ci-dessous. La 2e courbe correspond à la solution exacte théorique (je rappelle que la méthode numérique est approximative)



Si on avait pris $dt = 0.1$, on ne ferait pas la différence entre les deux courbes.

Équation différentielle du premier ordre

Le nom complet des équations qui nous intéressent est « équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants ».

$$(E): a \cdot y' + b \cdot y = f(t)$$

où a et b sont des constantes avec $a \neq 0$, $f(t)$ est une fonction, y est une fonction de t et y' sa dérivée. Il y a des (t) sous-entendus :

$$(E): a \cdot y'(t) + b \cdot y(t) = f(t)$$

Exemple : l'équation $\theta' = -0,05(\theta - 10)$ peut se mettre sous la forme $\theta' + 0,05\theta = 0,5$.

On parle de **membre de gauche**, **membre de droite** (côté gauche et côté de droite du $=$).

Méthode de résolution

La méthode suivante, en 4 étapes, permet de résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre. Une petite adaptation permettra de résoudre aussi les équations d'ordre 2 (avec du y''). Les sujets seront formulés en suivant cette méthode.

Dans les problèmes qui nous intéressent, en plus de l'équation, on a toujours connaissance de la condition initiale $y(0)$ (j'insiste : $y(0)$ ne fait pas partie de l'équation, c'est une information en plus). Les points 1, 2 et 3 utilisent l'équation (E). Le point 4 prend en compte la condition initiale.

$$(E) : a y' + b y = f(t) \quad \text{et} \quad y(0) = \dots$$

Exemple : (E) : $5y' + y = 12$ et $y(0) = 0$

(1) Résoudre l'équation sans second membre.

C'est l'équation dont il ne reste que les termes en y et y' .

$$(E_0) : a y' + b y = 0 \Rightarrow y' = \alpha y$$

La solution générale à (E_0) est : $y_0 = K \cdot e^{\alpha t}$, $K \in \mathbb{R}$

Exemple : (E) : $5y' + y = 12 \Rightarrow (E_0) : 5y' + y = 0 \Rightarrow y' = -0,2y \Rightarrow y_0 = K e^{-0,2t}$.

Remarques :

- On veut résoudre (E), pas (E_0) . Résoudre (E_0) est juste une étape qui nous permet à la résoudre (E) à la fin.
- On utilise l'indice 0 dans y_0 seulement pour étiqueter cette solution, pour pouvoir en reparler facilement à l'étape (3)

(2) Trouver une solution particulière de (E).

Il faut deviner quoi choisir selon $f(t)$. Voici les exemples les plus courants :

- si $f(t) = C^{ste}$, alors on cherche $y = C^{ste}$ aussi,
- si $f(t) = Polynome$, $\rightsquigarrow y = Polynome$ de même degré,
- si $f(t) = Ae^{\beta t} \rightsquigarrow y = Be^{\beta t}$ ou encore $y = B t e^{\beta t}$ (selon si $\beta = \alpha$ de y_0)

Dans les cas plus compliqués, on vous donne la solution, il suffit de vérifier qu'elle est valable.

Une fois que l'on a choisi une forme, on remplace y dans l'équation pour savoir quels paramètres choisir.

Exemple : avec $5y' + y = 12$, on essaie $y = C^{ste}$, donc $y' = 0$ ce qui donne dans l'équation $5 \times 0 + C^{ste} = 12$. On en déduit que $y_1 = 12$ est une solution.

On choisit de nommer y_1 la solution trouvée.

(3) $y = y_1 + y_0$ est solution générale de (E).

Exemple : avec $5y' + y = 12$, on obtient $y = 12 + K e^{-0,2t}$, $K \in \mathbb{R}$

(4) La condition initiale, souvent $y(0)$, permet de fixer K .

Exemple : On sait que $y(0) = 0$ et que $y(t) = 12 + K e^{-0,2t}$.

Pour $t = 0$, on a : $y(0) = 12 + K$ et $y(0) = 0$ donc $12 + K = 0 \Rightarrow K = -12$.

On peut donc conclure que l'unique solution de (E) respectant la contrainte $y(0) = 0$ est $y(t) = 12 - 12e^{-0,2t}$