

Exercice 1

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 5y' + y = 10 \quad \text{avec } y(0) = 0$$

- Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_0) : \quad 5y' + y = 0$.
- Le membre de droite étant $f(t) = 10$, une constante, proposer une solution particulière à l'équation (E) .
- Déduire la forme générale des solutions de (E) .
- Déterminer la solution y de (E) vérifiant la condition initiale.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 5y' + y = 6e^{-t} \quad \text{avec } y(0) = 0$$

- Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_0) : \quad 5y' + y = 0$.
- Le membre de droite étant $f(t) = 6e^{-t}$, on essaie une solution de forme Ae^{-t} . En déduire une solution particulière de (E) .
- Déduire la forme générale des solutions de (E) .
- Déterminer la solution y de (E) vérifiant la condition initiale.

Exercice 3 Champ de vecteurs

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 2y' + y = 0,5 + 0,2t \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}(y - 0,5 - 0,2t)$$

Supposons que je cherche une certaine solution y qui vérifie $y(1) = 2$. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_y$ passe par le point de coordonnées $(1; 2)$. Et comme y est solution de (E) on peut affirmer que $2y'(t) + y(t) = 0,5 + 0,2t$, ce qui doit être vrai en $t = 1$, donc :

$$2y'(1) + y(1) = 0,5 + 0,2 \Rightarrow y'(1) \approx -0,65$$

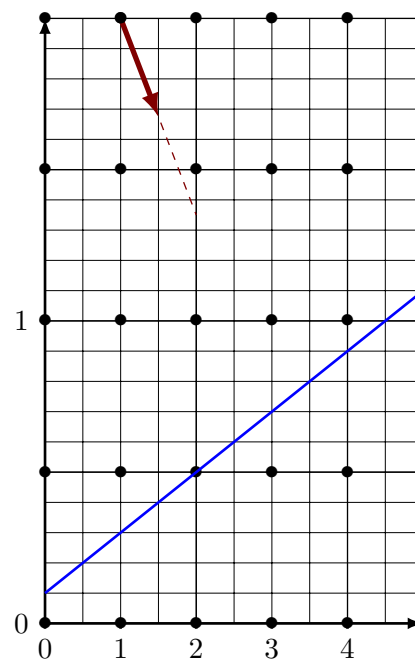
On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}_y$ en $(1; 2)$ doit avoir la pente $-0,65$. *Ce résultat est rendu plus évident par la 2e forme de l'équation.*

On a représenté le point en $(1; 2)$ et une portion de tangente.

On a représenté la droite d'équation $y = 0,1 + 0,2t$ qui est une solution particulière de (E) .

Par le même raisonnement, placez le morceau de tangente pour tous les points mis en évidence sur le quadrillage.

La suite nécessite les explications du professeur...



Exercice 4 Ordre de réaction

On considère la réaction chimique faisant intervenir un composé F, à température et pression constante. On a relevé la concentration $[F]$ au cours du temps.

t en h	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$[F]$ en $\mu\text{mol L}^{-1}$	15	12,5	10	8	6,5	5,5	4,5	3,7	2,9

On se propose de tester si la réaction chimique faisant disparaître F est d'ordre 1. C'est à dire que l'on veut savoir si on peut trouver k tel que :

$$[F]' = -k \cdot [F]$$

Pour la suite on notera $y = [F]$, exprimé en $\mu\text{mol L}^{-1}$.
 y est fonction du temps t exprimé en h.

- (1) D'après le tableau, donner la condition initiale $y(0)$.
- (2) Écrire l'équation différentielle (E) en supposant la relation $[F]' = -k \cdot [F]$ valide.
Vous ferez attention de ne pas confondre le k de la formule avec le K que l'on écrit quand on résout les équations différentielles.
- (3) Donner une solution particulière à (E).
- (4) En déduire la forme de la solution générale de (E).
- (5) Donner la solution de (E) qui satisfait la condition initiale.
- (6) Maintenant que l'on connaît la forme que devrait avoir $[F]$ dans l'hypothèse où $[F]' = -k \cdot [F]$, on souhaite vérifier que le résultat correspond à l'expérience et déterminer la valeur de k . Pour cela on va faire un ajustement.
 - a) Proposer un changement de variable $z = f([F])$ de sorte que $z = a \cdot + b$.
 - b) Faire ce changement de variable avec les données du tableau et calculer l'ajustement de z en t .
 - c) L'ajustement est-il satisfaisant ? (Justifier) Conclure sur la validité de l'hypothèse.
 - d) D'après les résultat de l'ajustement, en déduire la valeur de k . Préciser son unité.
 - e) Calculer le temps de demi réaction (temps au bout duquel, la moitié du F initial a disparu).

Exercice 5 Refroidissement

Le temps sera exprimé en secondes.

Un dispositif produit de la chaleur. La puissance calorique produite en fonction du temps est $p(t)$, exprimé en Watts.

Soit $\theta(t)$ la température en $^{\circ}\text{C}$. On souhaite contrôler cette température grâce à un dispositif de refroidissement qui se met en route quand la température monte. La température cible est $\theta_{\text{cible}} = 10^{\circ}\text{C}$.

Le dispositif obéit à l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad \theta'(t) = -B \cdot (\theta(t) - \theta_{\text{cible}}) + A \cdot p(t)$$

On prendra $B = 0,4$ et $A = 0,1$. L'unité sera à préciser.

Pour la sécurité du système,

- $\theta(t)$ ne devrait jamais dépasser 50°C ,
- $\theta(t)$ ne devrait pas dépasser 30°C plus longtemps qu'une minute.

On suppose que $p(t) = 200e^{-0,2t}$ et que $\theta(0) = 12^{\circ}\text{C}$.

- (1) Quelle doivent être les unités de A et B ?

- (2) Résoudre l'équation différentielle sans second membre :

$$\theta'(t) = -B \cdot \theta(t)$$

Remplacez les symboles connus par leur valeur.

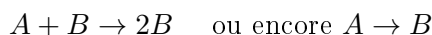
- (3) On souhaite vérifier une solution possible de (E) .
 (a) Soit $\theta_1(t) = 10 + 100 e^{-0,2t}$. Calculez $\theta_1'(t)$.
 (b) Vérifiez que θ_1 est bien une solution de (E) .
 (4) Donnez l'expression d'une solution générale de (E) .
 (5) Justifiez que l'unique solution de (E) satisfaisante est :

$$\theta(t) = 10 + 100e^{-0,2t} - 98e^{-0,4t}$$

- (6) (a) Déterminez $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$.
 (b) Peut-on dire que le système fait ce qui est attendu ? Justifiez.
 (7) Tracez la courbe sur votre calculatrice.
 (8) Y-a-t-il danger de détérioration du matériel ? Argumentez.

Exercice 6 Autocatalyse

On considère la réaction d'autocatalyse



Cette relation suit la cinétique suivante :

$$[A]' = -k \cdot [A] \cdot [B]$$

Les concentrations initiales sont $[A]_0$ et $[B]_0$.

On notera $S = [A]_0 + [B]_0$ et $\beta = \frac{[B]_0}{[A]_0}$. Dans tout l'exercice, on supposera que $K \gg 1$.

On choisira $S = 1 \text{ mmol } L^{-1}$, $K = 10^8$, $k = 0,02 \text{ mmol}^{-1} L \text{ min}^{-1}$. On s'intéressera à l'

- (1) Justifier que tout du long de l'expérience, $[A] + [B] = S$.
 (2) Justifier que $[A]_0 \approx S$
 (3) Comme $[B]$, au début, est très faible devant $[A]$, on peut considérer que $[A]$ est (au début) à peu près constant. On notera $y = [B]$.
 a) Donner la condition initiale $y(0)$.
 b) Expliciter l'équation différentielle (E) que suit y .
 c) Résoudre cette équation par la méthode habituelle.
 d) Donner $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$. Commenter.
 (4) Pour lever ce problème, il nous faut résoudre l'équation sans faire l'approximation. Comme il ne s'agit pas d'une équation linéaire, je vais donner la solution et on va se contenter de vérifier qu'elle est valide.

On note toujours $y = [B]$. On va vérifier que la fonction suivante est bien solution :

$$y = \frac{S K e^{S k t}}{K e^{S k t} + 1}$$

- a) Vérifier que $y(0) = [B]_0$.
 b) Considérant que $[A] = S - [B]$, déduire l'expression de $[A]$.
 c) Vérifier que l'on obtient le bon résultat pour $[A]_0$.
 d) Vérifier que $[A]' = -k \cdot [A] \cdot [B]$
 e) En traçant les courbes pour les deux solutions y (celle approximée puis la suivante), commenter.